



**В. А. Нечаев**

**ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ  
ПО АЛГЕБРЕ**

**Группы. Кольца. Поля.  
Векторные и евклидовы  
пространства.  
Линейные отображения**



Московский государственный  
заочный педагогический институт

В. А. НЕЧАЕВ

## ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО АЛГЕБРЕ

Группы. Кольца.  
Поля. Векторные  
и евклидовы  
пространства.  
Линейные отображения

Учебное пособие для студентов-заочников  
II курса физико-математических факультетов  
педагогических институтов

МОСКВА  
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»  
1983

*Рекомендовано к печати Главным управлением  
высших и средних педагогических учебных заведений  
Министерства просвещения РСФСР*

Рецензенты:

доктор физ.-мат. наук, профессор *Яглом И. М.*  
(Ярославский педагогический институт),  
кандидат физ.-мат. наук, доцент *Цаленко М. С.* (ВГПИ)

Редактор МГЗПИ: *Павлович О. А.*

**Василий Афанасьевич Нечаев**

**ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО АЛГЕБРЕ**

Группы. Кольца. Поля. Векторные и евклидовы  
пространства. Линейные отображения.

н/к

Редактор Л. В. Туркестанская

Художественный редактор Е. Н. Кзрасик

Технический редактор Р. С. Еникеева

Корректор Н. И. Котельникова

Сдано в набор 19.04.82. Подписано к печати 28.12.82. Формат  
60×90<sup>1/16</sup>. Бум. типограф. № 3 Гарнит. лит. Печать высокая.  
Усл. печ. л. 7,5. Усл. кр. отт. 7,75. Уч.-изд. л. 7,24. Тираж  
27000 экз. Заказ № 400. Цена 25 коп. Заказное.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвеще-  
ние» Государственного комитета РСФСР по делам издательств,  
полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марь-  
иной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфиче-  
ский комбинат Росглавполиграфпрома Государственного коми-  
тета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной  
торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

4309020400—305

103(03)—83

заказное



© Московский государственный заочный педагогический  
институт (МГЗПИ), 1983 г.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий задачник-практикум по алгебре предназначен для студентов-заочников физико-математических факультетов педагогических институтов. Он написан в соответствии с учебным пособием Ф. Л. Варпаховского, А. С. Солодовникова, И. В. Стеллецкого, содержащим теоретический материал по второй части курса «Алгебра и теория чисел»\* (в тексте сокращенно «Алгебра»).

Каждый параграф задачника начинается, как правило, с достаточно подробного, сопровождаемого ссылками на соответствующий теоретический материал решения нескольких наиболее типичных для рассматриваемого раздела задач, после чего приводятся упражнения для самостоятельной работы студента-заочника.

Предполагается, что, прежде чем приступить к решению задач того или иного параграфа, следует предварительно повторить необходимый теоретический материал по указанному выше пособию.

В заключение отметим, что поскольку в соответствующем учебном пособии в отличие от программы все вопросы, относящиеся к теории групп, рассмотрены в одной главе (до изучения поля комплексных чисел), то и в задачнике-практикуме автор не счел возможным дробить упражнения по группам (и кольцам) на две части.

---

\* Варпаховский Ф. Л., Солодовников А. С., Стеллецкий И. В. Алгебра. Группы, кольца, поля. Векторные и евклидовы пространства. Линейные отображения: Учебное пособие для студентов-заочников. М.: Просвещение, 1978.

# Глава I

## ГРУППЫ, КОЛЬЦА, ПОЛЯ

### § 1. БИНАРНЫЕ ОПЕРАЦИИ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

#### Примеры

1. Покажем, что во множестве  $M$  невырожденных матриц  $n$ -го порядка ( $n \geq 1$ ) матричное сложение не является бинарной операцией, а матричное умножение — бинарная операция.

Решение. а) Для доказательства первого утверждения достаточно привести пример двух таких невырожденных матриц, сумма которых является вырожденной матрицей.

Возьмем, например, матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -19 \neq 0 \text{ и } |B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

то матрицы  $A$  и  $B$  являются невырожденными. Сумма же их — матрица  $C = A + B$  уже не принадлежит множеству невырожденных матриц, поскольку

$$|C| = 0.$$

б) Пусть  $A$  и  $B$  — любые невырожденные матрицы  $n$ -го порядка:

$$|A| \neq 0, \quad |B| \neq 0. \quad (1)$$

Матрица  $A \odot B = C$  есть снова матрица  $n$ -го порядка<sup>1</sup>. Нам остается лишь доказать, что матрица  $C$  является невырожденной.

Поскольку, как известно, определитель произведения двух матриц равен произведению определителей этих матриц, т. е.

$$|C| = |A \odot B| = |A| \cdot |B|,$$

то с учетом (1) получаем, что  $|C| \neq 0$ . Итак, матрица  $C = A \odot B$  является невырожденной, т. е. является элементом того же множества, что и матрицы  $A$  и  $B$ . По определению бинарной операции умножение во множестве невырожденных матриц  $n$ -го порядка является бинарной операцией, а само множество невырожденных матриц с операцией умножения, т. е.  $\langle M; \odot \rangle$ , является алгебраической системой.

<sup>1</sup> Знак  $\odot$  обозначает умножение матриц.

2. Пусть  $K$  — множество  $\{-1, 0, 1\}$ . Покажем, что алгебраическая система  $\langle K; \cdot \rangle^*$  гомоморфна системе  $\langle \mathbf{Z}; \cdot \rangle$ .

**Решение.** Рассмотрим отображение  $\varphi$  множества  $\mathbf{Z}$  на множество  $K$ , которое определим так:

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= -1, \text{ если } a \in \mathbf{Z}, a < 0, \\ \varphi(0) &= 0, \\ \varphi(a) &= 1, \text{ если } a \in \mathbf{Z}, a > 0.\end{aligned}$$

Докажем, что отображение  $\varphi$  будет гомоморфным.

Пусть  $n$  и  $m$  — любые натуральные числа. В этом случае имеем:

$$\varphi(n) = 1, \varphi(m) = 1, \varphi(-n) = -1, \varphi(-m) = -1.$$

Так как

$$\begin{aligned}n \cdot m &\in \mathbf{Z}^+, n \cdot (-m) \in \mathbf{Z}^-, (-n) \cdot m \in \mathbf{Z}^-, \\ (-n) \cdot (-m) &\in \mathbf{Z}^+, n \cdot 0 = (-n) \cdot 0 = 0 \cdot m = 0 \cdot (-m) = 0,\end{aligned}$$

то имеем:

$$\begin{aligned}\varphi(n \cdot m) &= \varphi(n) \cdot \varphi(m) & (1 &= 1 \cdot 1), \\ \varphi(n \cdot (-m)) &= \varphi(n) \cdot \varphi(-m) & (-1 &= 1 \cdot (-1)), \\ \varphi((-n) \cdot m) &= \varphi(-n) \cdot \varphi(m) & (-1 &= (-1) \cdot 1), \\ \varphi((-n) \cdot (-m)) &= \varphi(-n) \cdot \varphi(-m) & (1 &= (-1) \cdot (-1)), \\ \varphi(n \cdot 0) &= \varphi(n) \cdot \varphi(0) & (0 &= 1 \cdot 0), \\ \varphi(0 \cdot m) &= \varphi(0) \cdot \varphi(m) & (0 &= 0 \cdot 1), \\ \varphi((-n) \cdot 0) &= \varphi(-n) \cdot \varphi(0) & (0 &= (-1) \cdot 0), \\ \varphi(0 \cdot (-m)) &= \varphi(0) \cdot \varphi(-m) & (0 &= 0 \cdot (-1)).\end{aligned}$$

Написанные равенства означают, что

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$$

для всех  $a \in \mathbf{Z}$ ,  $b \in \mathbf{Z}$ , т. е. что отображение  $\varphi$  является гомоморфным. Значит, система  $\langle K; \cdot \rangle$  гомоморфна системе  $\langle \mathbf{Z}; \cdot \rangle$ .

#### Упражнения для самостоятельного решения

3. Какие из арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление) являются бинарными операциями:

- на множестве  $\{1, 0, -1\}$ ;
- на множестве  $\mathbf{N}$ ;
- на множестве  $\mathbf{Z}$ ?

4. Является ли вычитание бинарной операцией на множестве

$$A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}?$$

5. Является ли бинарной операцией:

- умножение на множестве иррациональных чисел;
- сложение на множестве четных чисел;
- сложение на множестве нечетных чисел;
- нахождение десятичных логарифмов на множестве  $\mathbf{R}^+$ ;

\* Знак « $\cdot$ » обозначает обычное умножение.

д) нахождение среднего геометрического двух чисел на множестве  $\mathbf{R}^+$ ;

е) нахождение наибольшего общего делителя на множестве  $\mathbf{N}$ ?

6. Является ли деление бинарной операцией на множестве:

а)  $\mathbf{Q}$ ; б)  $\mathbf{R}$ ; в)  $\mathbf{Q} \setminus \{0\}$ ; г)  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ ?

7. Является ли бинарной операцией матричное умножение на множестве:

а) матриц вида  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ , где  $a$  — любое действительное число;

б) треугольных матриц третьего порядка, т. е. матриц вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

где  $a_{ij}$  — любые действительные числа?

8. Является ли бинарной операцией действие, выполняемое по правилу  $a \circ b = a^2 - 2ab + b^2$ , на множестве:

а)  $\mathbf{N}$ ; б)  $\mathbf{Z}$ ?

9. Являются ли действия, выполняемые по формулам:

а)  $a \circ b = (a + b)^2$ ;

б)  $a \circ b = \frac{a+b}{2}$ ;

в)  $a \circ b = \frac{a(a+1) + b(b+1)}{2}$ ,

бинарными операциями на множестве  $\mathbf{Q}$ , и если являются, то почему?

10. Являются ли действия, о которых идет речь в упражнении 9, бинарными операциями на множестве  $\mathbf{N}$ ?

11. Является ли алгебраической системой множество чисел вида  $a + b\sqrt{5}$ ,  $a, b \in \mathbf{Z}$ , относительно: а) сложения; б) вычитания; в) умножения?

12. Является ли алгебраической системой множество радиусов-векторов, исходящих из начала декартовой системы координат и расположенных в первой четверти координатной плоскости, с операцией: а) сложения векторов; б) вычитания векторов?

13. Является ли алгебраической системой декартов квадрат  $\mathbf{R}^2$  множества  $\mathbf{R}$  с операцией сложения  $(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d)$ ?

14. Является ли алгебраической системой множество матриц вида  $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , где  $a \in \mathbf{R}$ , относительно матричного умножения?

15. Даны две алгебраические системы: множество  $\mathbf{N}$  с операцией умножения и множество  $M = \{0, 1\}$  также с операцией умножения. Докажите, то отображение  $\varphi$ , ставящее каждому натуральному числу  $n \neq 1$  в соответствие число  $0 \in M$ , а числу  $n = 1$  — число  $1 \in M$ , является гомоморфизмом.

16. Даны две алгебраические системы: множество  $M$  вещественных матриц данного порядка  $n$  с операцией матричного умножения  $\odot$  и множество  $R$  с операцией обычного умножения. Являются ли гомоморфизмами следующие отображения системы  $\langle M; \odot \rangle$  на систему  $\langle R; \cdot \rangle$ :

а) отображение  $\varphi_1$ , такое, что  $\varphi_1(A) = |A|$ ;

б) отображение  $\varphi_2$ , такое, что  $\varphi_2(A) = a_{11}$ ,

где  $|A|$  — определитель матрицы  $A \in M$ ,  $a_{11}$  — элемент первой строки и первого столбца матрицы  $A$ ?

17. Даны три алгебраические системы: множество  $N$  с операцией сложения, множество  $M_1 = \{x \mid x = 2k, k \in N\}$  также с операцией сложения и множество  $M_2 = \{x \mid x = 2k + 1, k \in N\}$  с операцией умножения. Выясните, какие из этих систем изоморфны между собой.

18. Докажите, что множество  $R^+$  с операцией сложения и множество  $R^-$  с операцией сложения являются изоморфными алгебраическими системами.

19. Докажите, что алгебраические системы — множество  $M$  матриц вида  $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , где  $x \in R$ , с матричным умножением и множество  $R$  с обычным сложением — изоморфны между собой.

20. Докажите, что всякое множество с бинарной операцией изоморфно само себе.

21. Пусть на каждом из множеств  $M_1$  и  $M_2$  определена бинарная операция. Докажите, что если  $M_1$  изоморфно  $M_2$ , то и  $M_2$  изоморфно  $M_1$ .

22. Докажите, что если на каждом из множеств  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  определена бинарная операция и при этом  $M_1$  изоморфно  $M_2$ , а  $M_2$  изоморфно  $M_3$ , то  $M_1$  изоморфно  $M_3$ .

23. Какое заключение можно вывести из примеров 20, 21 и 22?

24. Докажите, что алгебраические системы — множество  $N$  с операцией сложения, множество  $M$  отрицательных четных чисел также с операцией сложения и множество  $S = \{2, 2^2, \dots, 2^n, \dots\}$  с операцией умножения — изоморфны между собой.

## § 2. НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ОПЕРАЦИЙ. НЕЙТРАЛЬНЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ. ОБРАТИМЫЕ ОПЕРАЦИИ

### 1. Коммутативные и ассоциативные операции. Полугруппы

#### Примеры

1. Докажем, что на множестве  $R$  бинарная операция, заданная формулой  $a \circ b = \frac{a+b}{2}$ , коммутативна, но не ассоциативна. Выясним, является ли  $R$  полугруппой относительно бинарной операции нахождения среднего арифметического?



**Решение** Пусть  $a, b, c$  — любые действительные числа. В силу коммутативности сложения на  $\mathbf{R}$  получим:

$$a \circ b = \frac{a+b}{2} = \frac{b+a}{2} = b \circ a,$$

т. е. бинарная операция нахождения среднего арифметического на  $\mathbf{R}$  коммутативна.

Далее,

$$(a \circ b) \circ c = \frac{\frac{a+b}{2} + c}{2} = \frac{a+b+2c}{4} \quad (1)$$

и

$$a \circ (b \circ c) = \frac{a + \frac{b+c}{2}}{2} = \frac{2a+b+c}{4}. \quad (2)$$

Из результатов (1) и (2) следует, что при  $a \neq c$  равенство  $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$  не является справедливым. Следовательно, заданная операция не ассоциативна на  $\mathbf{R}$ . В силу вышесказанного  $\mathbf{R}$  не является полугруппой относительно бинарной операции нахождения среднего арифметического.

#### Упражнения для самостоятельного решения

2. Являются ли коммутативными и ассоциативными на множестве  $\mathbf{Z}$  бинарные операции сложения, умножения и вычитания?

3. Являются ли коммутативными и ассоциативными на множестве  $\mathbf{Q} \setminus \{0\}$  бинарные операции умножения и деления?

4. Какие из нижеприведенных бинарных операций:

а)  $a \circ b = a^b$ ;

б)  $a \circ b = c$ , где  $c$  — наибольший общий делитель чисел  $a$  и  $b$ ;

в)  $a \circ b = m$ , где  $m$  — наименьшее общее кратное чисел  $a$  и  $b$ , коммутативны и какие ассоциативны на множестве  $\mathbf{N}$ ?

5. Докажите, что на множестве  $\mathbf{R}^+$  бинарная операция  $a \circ b = \sqrt{a \cdot b}$  нахождения среднего геометрического коммутативна, но не ассоциативна.

6. Почему действие, выполняемое по правилу  $a \circ b = a^2 - b^2$ , не является бинарной операцией на множестве  $\mathbf{N}$  и является таковой на множестве  $\mathbf{Z}$ ? Выясните, коммутативна ли указанная операция на  $\mathbf{Z}$ ; покажите также, что она не является ассоциативной на этом множестве.

7. Покажите, что действие, выполняемое по правилу  $a \circ b = a^2 + b^2$ , является коммутативной, но не ассоциативной бинарной операцией на множестве  $\mathbf{R}$ .

8. Покажите, что бинарная операция матричного умножения  $\odot$  на множестве  $M$  матриц вида  $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , где  $a \in \mathbf{R}$ , коммутативна и

ассоциативна. Является ли алгебраическая система  $\langle M; \odot \rangle$  полугруппой?

9. Покажите, что на некотором множестве бинарная операция, заданная формулой  $a \circ b = b$ , некоммутативна, но ассоциативна.

10. Является ли множество  $\mathbf{Z}$  полугруппой относительно: а) сложения; б) вычитания?

11. Является ли множество  $\mathbf{N}$  полугруппой относительно операции нахождения наибольшего общего делителя?

12. Покажите, что множество  $\{1, 0, -1\}$  образует полугруппу относительно обычной операции умножения.

13. Покажите, что множество четырехмерных арифметических векторов вида  $(a, b, b, 0)$ , где  $a, b \in \mathbf{N}$ , образует полугруппу относительно операции сложения арифметических векторов.

14. Пусть  $I$  — множество, состоящее из всех подмножеств данного множества  $M$ . Покажите, что  $I$  образует полугруппу относительно операции пересечения.

15. Почему множество  $\mathbf{R}$  не является полугруппой относительно действия, выполняемого по правилу  $a \circ b = a^2 + b^2$  для любых  $a, b \in \mathbf{R}$ ?

## 2. Нейтральные и обратные элементы. Обратимые операции

### Примеры

16. Докажем, что во множестве  $K$ , содержащем не менее двух элементов, на котором формулой  $a \circ b = b$  задана бинарная операция, не существует нейтрального элемента.

**Решение.** Допустим, что в  $K$  существует нейтральный элемент  $e$ , и пусть  $a$  — любой элемент из  $K$ . По определению нейтрального элемента  $a \circ e = a$ , а из условия примера следует, что  $a \circ e = e$ , т. е.  $a = e$ . Это означает, что  $K$  состоит из одного элемента. Полученный результат противоречит условию, а потому сделанное допущение ошибочно.

17. Докажем, что на множестве  $M$  матриц вида  $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , где  $x$  — любое действительное число, бинарная операция матричного умножения обратима.

**Решение.** Известно, что на множестве квадратных матриц одного и того же порядка операция матричного умножения ассоциативна. Следовательно, рассматриваемая операция ассоциативна на множестве  $M$ .

Пусть  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  — любая матрица из  $M$ . По правилу умножения матриц получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A,$$

и потому матрица  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$  есть нейтральный элемент. Итак,  $M$  обладает нейтральным элементом.

Так как  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ , то матрица  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  является невырожденной, и, следовательно, она имеет обратную матрицу. Применяя один из способов нахождения обратных матриц, найдем, что  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $-a \in \mathbb{R}$ , а потому  $A^{-1} \in M$ .

Итак, для любого элемента из  $M$  во множестве  $M$  существует обратный элемент.

Полученные результаты позволяют сделать вывод (см. «Алгебра», с. 15), что операция матричного умножения обратима на множестве  $M$ .

### Упражнения для самостоятельного решения

18. Обладает ли множество чисел вида  $a + b\sqrt{5}$ , где  $a$  и  $b$  — любые целые числа, нейтральным элементом относительно обычного умножения? Проверьте, имеются ли в данной алгебраической системе обратные элементы для элементов  $2 + \sqrt{5}$  и  $5 - 2\sqrt{5}$ . Обратима ли на данном множестве операция умножения?

19. Докажите, что бинарная операция матричного умножения на множестве матриц вида  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ , где  $a$  — любое не равное нулю действительное число, обратима. Найдите обратные элементы для матриц  $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ .

20. Докажите, что относительно бинарной операции  $a \circ b = \frac{a+b}{2}$  множество  $\mathbb{R}$  не содержит нейтрального элемента. Является ли данная операция обратимой на множестве  $\mathbb{R}$ ?

21. Обладает ли множество  $\mathbb{N}$  правым нейтральным; левым нейтральным; нейтральным элементом относительно бинарной операции, выполняемой по правилу  $a \circ b = a^b$ ? Обратима ли данная операция на множестве  $\mathbb{N}$ ?

22. Докажите, что относительно обычного умножения множество  $A = \{x | x = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$  не содержит нейтрального элемента. Обратима ли операция умножения на множестве  $A$ ?

23. Обратимы ли операции, о которых идет речь в упражнениях 6 и 7, на указанных там множествах?

24. Докажите, что относительно бинарной операции, выполняемой по правилу  $a \circ b = \sqrt{a \cdot b}$ , множество  $\mathbb{R}^+$  не обладает нейтральным элементом. Обратима ли эта операция на множестве  $\mathbb{R}^+$ ?

25. Пусть  $I$  — множество подмножеств некоторого непустого множества  $M$ . Существует ли в  $I$  нейтральный элемент (если суще-

ствуется, то какой) относительно операции объединения подмножеств на  $I$ ; пересечения подмножеств? Какие элементы из множества  $I$  имеют обратные? Обратимы ли указанные операции на множестве  $I$ ?

26. Докажите, что на множестве  $\mathbf{Z}$  действие, выполняемое по правилу  $a \circ b = \begin{vmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{vmatrix}$ , является бинарной, коммутативной, ассоциативной, но необратимой операцией. Обладает ли алгебраическая система  $\langle \mathbf{Z}; \circ \rangle$  нейтральным элементом, и если обладает, то каким именно?

27. Докажите, что на множестве  $\mathbf{Q}$  действие, выполняемое по правилу  $a \circ b = \frac{a}{2}b$ , является бинарной операцией, которая коммутативна, ассоциативна, но не обратима. Каким нейтральным элементом обладает алгебраическая система  $\langle \mathbf{Q}; \circ \rangle$ ? Для элемента  $a = 8$  найдите обратный.

### § 3. ГРУППЫ

#### 1. Основные определения

##### Примеры

1. Докажем, что множество  $M$  невырожденных матриц порядка  $n$  составляет группу относительно матричного умножения.

**Доказательство.** На множестве  $M$  матричное умножение является бинарной (см. пример 1 из § 1) операцией, которая, как известно из теории матриц, ассоциативна.

Множество  $M$  содержит единичную матрицу

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

являющуюся невырожденной, поскольку  $|E| = 1 \neq 0$ .

Кроме того, для любой матрицы  $A$  порядка  $n$  имеем  $A \odot E = E \odot A = A$ . Следовательно,  $E$  — нейтральный элемент в множестве  $M$ , т. е. система  $\langle M; \odot \rangle$  обладает нейтральным элементом.

Из теории матриц известно, что всякая невырожденная матрица  $A$  имеет обратную матрицу  $A^{-1}$ , т. е. такую, что  $A \odot A^{-1} = A^{-1} \odot A = E$ . При этом матрица  $A^{-1}$  является невырожденной. Действительно, по теореме об определителе произведения матриц имеем  $|A \odot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|$ , т. е.  $|E| = |A| \cdot |A^{-1}|$ . Из последнего равенства и из того, что  $|E| \neq 0$ ,  $|A| \neq 0$ , следует, что  $|A^{-1}| \neq 0$ .

Итак, операция  $\odot$  на множестве  $M$  ассоциативна, обладает нейтральным элементом и для каждого элемента  $A \in M$  существует обратный элемент  $A^{-1} \in M$ . Следовательно, алгебраическая система  $\langle M; \odot \rangle$  является группой. Эта группа не коммутативна,

так как умножение квадратных матриц порядка  $n$ , в том числе и невырожденных, не обладает свойством коммутативности.

2. Докажем, что множество  $\mathbf{Z}$  образует группу относительно действия, заданного формулой

$$a \circ b = \begin{cases} a + b, & \text{если } a \text{ — четное число, } b \text{ — любое целое число,} \\ a - b, & \text{если } a \text{ — нечетное число, } b \text{ — любое целое число.} \end{cases}$$

Доказательство. 1. Рассматриваемое на  $\mathbf{Z}$  действие сводится к сложению или вычитанию целых чисел, а поскольку как сложение, так и вычитание элементов из  $\mathbf{Z}$  дает в результате элемент из  $\mathbf{Z}$ , то на множестве  $\mathbf{Z}$  рассматриваемое действие является бинарной операцией.

2. Проанализируем возможные случаи

а) Если  $a, b$  — четные числа, а  $c$  — любое число из  $\mathbf{Z}$ , то

$$a \circ (b \circ c) = a + (b + c),$$

$$(a \circ b) \circ c = (a + b) + c = a + (b + c),$$

т. е.  $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ .

б) Если  $a$  — четное число,  $b$  — нечетное, а  $c$  — любое число из  $\mathbf{Z}$ , то

$$a \circ (b \circ c) = a + (b - c),$$

$$(a \circ b) \circ c = (a + b) - c = a + (b - c),$$

т. е.  $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ .

в) Если  $a$  — нечетное число,  $b$  — четное число, а  $c$  — любое число из  $\mathbf{Z}$ , то  $a - b$  нечетно и потому

$$a \circ (b \circ c) = a - (b + c) = (a - b) - c,$$

$$(a \circ b) \circ c = (a - b) - c,$$

т. е.  $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ .

г) Если  $a, b$  — нечетные числа, а  $c$  — любое число из  $\mathbf{Z}$ , то  $a - b$  четно и потому

$$a \circ (b \circ c) = a - (b - c) = (a - b) + c,$$

$$(a \circ b) \circ c = (a - b) + c,$$

т. е.  $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ .

Итак, во всех возможных случаях заданная на  $\mathbf{Z}$  бинарная операция является ассоциативной.

3. Так как 0 — четное число, то  $0 \circ a = 0 + a = a$ . Кроме того, если  $a$  четно, то  $a \circ 0 = a + 0 = a$ ; если же  $a$  нечетно, то  $a \circ 0 = a - 0 = a$ . Итак,  $0 \circ a = a \circ 0 = a$ , т. е. 0 является в  $\mathbf{Z}$  нейтральным элементом относительно заданной операции

4. Для любого элемента  $a \in \mathbf{Z}$  в  $\mathbf{Z}$  существует обратный элемент: для четного  $a$  обратным будет противоположное число  $-a$ , так как  $a \circ (-a) = a + (-a) = 0$ ; для нечетного  $a$  обратным будет само число  $a$ , так как  $a \circ a = a - a = 0$ .

Итак,  $\mathbf{Z}$  является группой относительно заданной операции.

Однако эта группа не является абелевой, поскольку  $4 \circ 5 = 4 + 5 = 9$ ,  $5 \circ 4 = 5 - 4 = 1$ , т. е.  $4 \circ 5 \neq 5 \circ 4$ .

3. Пусть  $G$  — совокупность всех преобразований множества  $\mathbf{R}$ , задаваемых формулами  $f(x) = x + a$ , где  $a \in \mathbf{R}$ . Докажите, что  $G$

есть группа относительно операции умножения преобразований. Укажите нейтральный элемент этой группы и для каждого элемента найдите обратный.

**Доказательство.** 1. Прежде всего необходимо проверить, что если  $f \in G$  и  $h \in G$ , то  $fh \in G$ , т. е. что умножение преобразований есть бинарная операция на  $G$ .

По определению операции умножения преобразований имеем:

$$(fh)(x) = h(f(x)).$$

Обозначим преобразование  $x \rightarrow x + a$  множества  $\mathbf{R}$  через  $f_a$ . Тогда

$$(f_a f_b)(x) = f_b(f_a(x)) = f_b(x + a) = x + a + b = f_{a+b}(x),$$

т. е.

$$f_a f_b = f_{a+b}.$$

Этим доказано, что  $f_a f_b \in G$ .

2. Операция умножения преобразований ассоциативна (см. «Алгебра», с. 18—19).

3. Тожественное преобразование, играющее роль нейтрального элемента для операции умножения преобразований, принадлежит  $G$ . Таким преобразованием является  $f_0$ , так как  $f_0(x) = x$  для  $\forall x \in \mathbf{R}$ . Оно принадлежит  $G$ .

4. Преобразование, обратное любому преобразованию  $f_a$  из  $G$ , которое играет роль обратного элемента для  $f_a$ , снова принадлежит  $G$ . Таким преобразованием, обратным для  $f_a$ , является  $x \rightarrow x - a$ . Это преобразование  $f_{-a} \in G$ .

Итак,  $G$  есть группа.

#### Упражнения для самостоятельного решения

4. Выяните, какие из нижеприведенных множеств являются группами относительно нижеуказанных операций:

- множество  $\mathbf{Z}$  относительно вычитания;
- множество четных чисел относительно умножения;
- множество целых чисел, кратных любому заданному натуральному числу  $n$ , относительно сложения;
- множество  $\mathbf{Q}^+$  относительно умножения;
- множество  $\mathbf{Q}$  относительно умножения;
- множество  $\mathbf{Q} \setminus \{0\}$  относительно умножения;
- множество  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$  относительно умножения;
- множество квадратных матриц  $n$ -го порядка относительно сложения, умножения;
- множество матриц  $n$ -го порядка с определителем, равным 1, относительно умножения матриц, сложения;
- множество решений любой заданной системы линейных однородных уравнений относительно сложения;
- множество трехмерных ( $n$ -мерных) арифметических векторов относительно сложения;

м) множество чисел вида  $a + b\sqrt{2}$  относительно сложения, если  $a$  и  $b$  — любые рациональные числа;

н) множество параллельных переносов в плоскости относительно операции их последовательного выполнения;

о) множество многочленов одной и той же степени  $n$  от одного аргумента относительно сложения;

п) множество многочленов степени не выше  $n$  относительно сложения;

р) множество многочленов от одного аргумента относительно сложения;

с) множество матриц вида  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ , где  $a \in \mathbf{R}$ , относительно сложения матриц;

т) множество матриц вида  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ , где  $a \in \mathbf{R}$ ,  $a \neq 0$ , относительно умножения матриц.

5. Выясните, является ли группой множество матриц вида  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix}$ , где  $a$  и  $b$  — любые, не равные одновременно нулю действительные числа, относительно матричного умножения.

6. Докажите, что множество матриц вида  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ , где  $a, b$  — действительные, отличные от нуля числа, составляет группу относительно матричного умножения.

7. Докажите, что множество матриц вида  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ , где  $a, b$  — любые, не равные одновременно нулю действительные числа, образует группу относительно матричного умножения.

8. Докажите, что множество матриц вида  $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ , где  $a_{ii} \neq 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ), является группой относительно матричного умножения.

9. Составьте таблицу умножения элементов симметрической группы  $S_3$  подстановок 3-й степени, обозначив элементы этой группы буквами. По таблице найдите взаимно обратные элементы этой группы и докажите, что рассматриваемая группа не является коммутативной.

10. Для множества  $G_1 = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ , состоящего из подстановок  $p_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ , составьте таблицу умножения и с ее помощью убедитесь, что  $G_1$  — абелева группа.

Примечание. Отметим, что подстановку вида  $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{k-1} & \alpha_k & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{n-k} \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_k & \alpha_1 & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{n-k} \end{pmatrix} \in S_n$  называют  $k$ -членным циклом и кратко записывают так:  $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k)$ . Запись цикла можно начинать с любого действительно перемещаемого символа, например:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (1 \ 3 \ 2) = (3 \ 2 \ 1) = (2 \ 1 \ 3).$$

Два цикла  $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k)$  и  $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_l)$  называют независимыми, если множества  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$  и  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l\}$  не пересекаются. Двучленный цикл называют *транспозицией*. Так,  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 3 \ 5)$  является трехчленным циклом, а подстановка  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (2 \ 3)$  — двучленным циклом, или транспозицией. Каждую подстановку можно представить в виде произведения независимых циклов, например:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 3) \cdot (4 \ 5 \ 6 \ 8)$

Каждый цикл (а следовательно, и каждую подстановку) можно разложить в произведение транспозиций:

$$(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{k-1} \alpha_k) = (\alpha_1 \alpha_2) \cdot (\alpha_1 \alpha_3) \cdot \dots \cdot (\alpha_1 \alpha_{k-1}) \cdot (\alpha_1 \alpha_k).$$

Четная подстановка может быть разложена в произведение только четного числа транспозиций, а нечетная — в произведение только нечетного числа транспозиций.

### 11. Докажите, что:

а) при умножении двух подстановок одинаковой четности получается четная подстановка, а при умножении двух подстановок разной четности — нечетная подстановка;

б) подстановки  $a$  и  $a^{-1}$  имеют одинаковую четность, где  $a$  — произвольная подстановка;

в) множество четных подстановок  $n$ -й степени образует группу относительно операции умножения подстановок.

**Примечание** Группа всех четных подстановок  $n$ -й степени называется *анакорпеременной группой*  $n$ -й степени и обозначается  $A_n$ .

12. Дано множество  $M = \{a_0, a_1, a_2\}$  поворотов (вращений) правильного треугольника в плоскости этого треугольника вокруг его центра против часовой стрелки соответственно на углы  $0^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $240^\circ$ . Эти повороты совмещают треугольник с самим собой. Последовательное выполнение двух любых таких поворотов называется *произведением (композицией)* этих двух поворотов. Докажите, что  $M$  является группой относительно введенной в  $M$  операции.

**Примечание.** Эта группа называется *группой поворотов треугольника*.

Любое преобразование некоторой фигуры в себя, сохраняющее расстояния между ее точками, называется *самосовмещением* данной фигуры. Следовательно, повороты  $a_0, a_1, a_2$  являются также и самосовмещениями правильного треугольника.

13. Кроме поворотов, у правильного треугольника имеется еще 3 самосовмещения, а именно отражения  $a_3, a_4, a_5$  этого треугольника относительно его осей  $l_1, l_2, l_3$  симметрии (рис. 1). Каждое из шести преобразований, переводящих треугольник  $ABC$  в себя, можно записать в виде подстановки. Например,

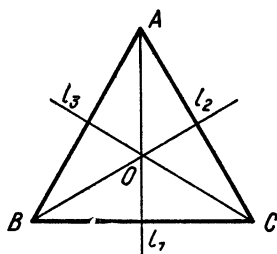


Рис. 1

$$a_1 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix},$$



где в верхней строке указаны вершины треугольника, а нижняя строка показывает, во что каждая из них переходит. Пользуясь правилом умножения подстановок, составьте таблицу умножения для всех самосовмещений правильного треугольника и по таблице убедитесь в том, что они составляют группу.

14. Пусть  $F$  — некоторая фигура на плоскости. Докажите, что множество самосовмещений фигуры  $F$  является группой относительно операции умножения преобразований.

15. Найдите группу всех самосовмещений прямоугольника  $ABCD$ , не являющегося квадратом.

16. Найдите группу всех самосовмещений ромба, не являющегося квадратом.

17. Найдите группу всех самосовмещений квадрата.

18. Выясните, коммутативна ли:

- а) группа поворотов правильного треугольника;
- б) группа самосовмещений правильного треугольника;
- в) группа самосовмещений прямоугольника;
- г) группа самосовмещений ромба.

19. Найдите группу поворотов правильного  $n$ -угольника.

20. На множестве  $\mathbf{Q} \setminus \{0\}$  определено действие  $a \circ b = \frac{a \cdot b}{2}$ .

Докажите, что относительно указанного действия данное множество является группой.

21. Пусть  $G$  — множество всевозможных троек чисел вида  $(k_1; k_2; 1)$  и  $(k_1; k_2; -1)$  и пусть на  $G$  определено действие, выполняемое по правилу

$$(k_1; k_2; \varepsilon) \circ (l_1; l_2; \delta) = (k_1 + l_1; k_2 + l_2; \varepsilon\delta).$$

Докажите, что относительно указанного действия  $G$  является группой.

22. Пусть  $a \cdot a = e$  для любого элемента  $a$  мультипликативной группы  $G$ . Докажите, что группа  $G$  является абелевой.

23. Докажите, что множество  $A$  заданных на  $\mathbf{R}$  преобразований вида  $f(x) = ax$ , где  $a \in \mathbf{R}$ ,  $a \neq 0$ , является группой относительно операции умножения преобразований. Для преобразований  $f_1(x) = 2x$ ,  $f_2(x) = -2x$ ,  $f_3(x) = \frac{1}{3}x$  найдите обратные преобразования.

24. Покажите, что каждое из нижеприведенных множеств вещественных функций от одного аргумента, заданных на  $\mathbf{R}$ , является полугруппой относительно операции умножения преобразований множества  $\mathbf{R}$ :

- а) множество многочленов;
- б) множество многочленов первой степени;
- в) множество многочленов четной степени;
- г) множество многочленов нечетной степени;
- д) множество функций вида  $x^n$ , где  $n$  — любое натуральное число.

25. Какие из нижеприведенных множеств вещественных функ-

ций, заданных на  $\mathbf{R}$ , образуют полугруппы относительно умножения преобразований:

- а) множество функций, принимающих значение нуль при  $x = 1$ ;
- б) множество четных функций;
- в) множество нечетных функций;
- г) множество ограниченных функций?

**26.** Пусть  $M$  — множество точек плоскости. Выясните, какие из нижеприведенных множеств преобразований множества  $M$  являются группами преобразований:

- а) множество осевых симметрий плоскости;
- б) множество поворотов плоскости вокруг данной точки, вокруг всевозможных ее точек.

## 2. Изоморфизм групп

### Примеры

**27.** Докажем, что группа  $M$  поворотов правильного треугольника (см. упр. 12 § 3) изоморфна знакопеременной группе  $A_3$  третьей степени (см. упр. 11 в) § 3).

**Решение.** Имеем  $M = \{a_0, a_1, a_2\}$ , где  $a_0, a_1, a_2$  — повороты правильного треугольника вокруг его центра соответственно на углы  $0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$ . С другой стороны,

$$A_3 = \{s_0, s_1, s_2\}, \text{ где } s_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим таблицы умножения для групп  $M$  и  $A_3$ :

Таблица 1

	$a_0$	$a_1$	$a_2$
$a_0$	$a_0$	$a_1$	$a_2$
$a_1$	$a_1$	$a_2$	$a_0$
$a_2$	$a_2$	$a_0$	$a_1$

Таблица 2

	$s_0$	$s_1$	$s_2$
$s_0$	$s_0$	$s_1$	$s_2$
$s_1$	$s_1$	$s_2$	$s_0$
$s_2$	$s_2$	$s_0$	$s_1$

Таблицы 1 и 2 показывают, что искомым изоморфизмом группы  $M$  на группу  $A_3$  будет следующее взаимно однозначное отображение  $\varphi$ :

$$a_0 \rightarrow s_0, a_1 \rightarrow s_1, a_2 \rightarrow s_2.$$

Действительно, таблицы и вышеуказанное правило отображения  $M$  на  $A_3$  позволяют утверждать: если  $a_i a_j = a_k$ , то  $s_i s_j = s_k$ , следовательно,

$$\varphi(a_i a_j) = \varphi(a_k) = s_k = s_i s_j = \varphi(a_i) \varphi(a_j).$$

Итак, группа  $M$  отображена на группу  $A_3$  взаимно однозначно и с сохранением операции, т. е. изоморфно. Следовательно, группа  $M$  изоморфна группе  $A_3$ .

#### Упражнения для самостоятельного решения

28. Докажите, что аддитивная группа  $\mathbf{Z}$ , аддитивная группа четных чисел и мультипликативная группа целых степеней числа 2 изоморфны между собой.

29. Докажите, что аддитивная группа  $\mathbf{R}$  изоморфна группе матриц вида  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ , где  $a \in \mathbf{R}$ , относительно матричного сложения.

30. Докажите, что множество двумерных арифметических векторов  $(a, b)$  и множество матриц вида  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ , где  $a, b \in \mathbf{R}$ , являются изоморфными группами относительно операций сложения в этих множествах.

31. Выясните, изоморфна ли группа  $\mathbf{Q}^+$  по умножению группе  $\mathbf{Q}$  по сложению.

У к а з а н и е. Предположим, что существует изоморфное отображение  $\varphi: \mathbf{Q}^+ \rightarrow \mathbf{Q}$ . Пусть  $\varphi(1) = a$ . Тогда  $\varphi(n) = a^n$  при любом

натуральном  $n$  (тем самым  $a \neq 1$ ) и  $\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = a^{\frac{1}{n}}$ . Значит, число  $a \in \mathbf{Q}$  должно быть таким, что  $\sqrt[n]{a} \in \mathbf{Q}$  при любом натуральном  $n$ . Покажите, что такого числа  $a \neq 1$  не существует.

32. Выясните, изоморфна ли группа всех самосовмещений ромба (см. упр. 16 § 3) группе всех самосовмещений прямоугольника (см. упр. 15 § 3).

## § 4. ПОДГРУППЫ

### Примеры

1. Докажем, что множество  $A$  целых чисел, кратных трем, есть подгруппа аддитивной группы  $\mathbf{Z}$ .

Р е ш е н и е. Имеем:

$$1) A = \{x | x = 3k, k \in \mathbf{Z}\}, A \subset \mathbf{Z}. \quad (1)$$

2) Пусть  $x_1, x_2$  — любые элементы из  $A$ , т. е.  $x_1 = 3k_1, x_2 = 3k_2, k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$ . Так как  $\mathbf{Z}$  есть аддитивная группа, то  $k_1 + k_2 \in \mathbf{Z}$  и потому

$$x_1 + x_2 = 3k_1 + 3k_2 = 3(k_1 + k_2) \in A. \quad (2)$$

3) Пусть  $x = 3k$  есть любой элемент из  $A$ , следовательно,  $k \in \mathbf{Z}$ ; тогда и  $-k \in \mathbf{Z}$ , а потому

$$-x = -3k = 3 \cdot (-k) \in A. \quad (3)$$

Из (1), (2), (3) следует, что  $A$  есть подгруппа аддитивной группы  $\mathbf{Z}$ .

2. Докажем, что множество  $M$  матриц вида  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ , где  $a \in \mathbb{R}$  и  $a \neq 0$ , есть подгруппа мультипликативной группы  $G$  всех невырожденных матриц 2-го порядка.

Решение. 1) Пусть  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$  — любая матрица из  $M$ , следовательно,  $a \neq 0$ . Но тогда  $|A| = a^2 \neq 0$ , а потому  $A$  является невырожденной матрицей. Итак,  $M \subset G$ .

2) Пусть  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$  — любые матрицы из  $M$ ,  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ , тогда  $ab \neq 0$ ,  $AB = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix}$ , т. е.  $AB \in M$ .

3) Пусть  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ . Тогда  $A^{-1} = \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$ , при этом

$\frac{1}{a} \neq 0$ , а потому  $A^{-1} \in M$ .

Из 1), 2), 3) следует, что  $M$  есть подгруппа группы  $G$ .

3. Выясним, принадлежит ли элемент  $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

знакопеременной группе  $A_5$  пятой степени. Какой порядок имеет этот элемент и какую циклическую подгруппу группы  $A_5$  он порождает? Чему равен элемент, обратный элементу  $a$ ?

Решение. 1) Запишем подстановку  $a$  в виде цикла и разложим ее в произведение подстановок — транспозиций:  $(1\ 2\ 3\ 5\ 4) = (1\ 2) \cdot (1\ 3) \cdot (1\ 5) \cdot (1\ 4)$ . Число транспозиций в разложении оказалось четным, следовательно, подстановка  $a$  четная, т. е.  $a \in A_5$ .

2) Имеем:

$$\begin{aligned} a^0 &= e, \quad a^1 = a, \quad a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 4\ 2\ 5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^3 &= a^2 \cdot a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= (1\ 5\ 2\ 4\ 3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^4 &= a^3 \cdot a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= (1\ 4\ 5\ 3\ 2), \end{aligned}$$

$$a^5 = a^4 \cdot a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = e.$$

Итак, порядок элемента  $a$  равен 5. Подгруппа, порожденная  $a$ , будет иметь следующий вид:

$$(a) = \{e = a^0, a, a^2, a^3, a^4\} = \{(1), (1\ 2\ 3\ 4\ 5), (1\ 3\ 4\ 2\ 5), (1\ 5\ 2\ 4\ 3), (1\ 4\ 5\ 3\ 2)\}.$$

3) Так как  $a^5 = a$ , то  $a^{-1} = a^{5-1} = a^4 = (1\ 4\ 5\ 3\ 2)$ .

4. Выпишите все элементы знакопеременной группы  $A_4$  четвертой степени. Выясните, является ли множество подстановок четвертой степени

$V = \{e = (1), a = (1\ 2) \cdot (3\ 4), b = (1\ 3) \cdot (2\ 4), c = (1\ 4) \cdot (2\ 3)\}$  подгруппой этой группы.

Решение. 1) Все  $4! = 24$  перестановки из четырех символов 1, 2, 3, 4 расположим в таком порядке, чтобы каждая последующая перестановка получалась от предыдущей с помощью одной транспозиции (перемены мест двух символов).

Начнем с перестановки 1, 2, 3, 4. Итак,  $1234 \rightarrow 1243 \rightarrow 1342 \rightarrow 1324 \rightarrow 1423 \rightarrow 1432 \rightarrow 2431 \rightarrow 2413 \rightarrow 2314 \rightarrow 2341 \rightarrow 2143 \rightarrow 2134 \rightarrow 3124 \rightarrow 3142 \rightarrow 3241 \rightarrow 3214 \rightarrow 3412 \rightarrow 3421 \rightarrow 4321 \rightarrow 4312 \rightarrow 4213 \rightarrow 4231 \rightarrow 4132 \rightarrow 4123$ .

Так как всякая транспозиция меняет четность перестановки, то в полученном ряду все перестановки, взятые через одну, являются четными (они подчеркнуты).

Теперь уже легко составить все искомые четные подстановки — достаточно в каждой из них в качестве первой строки записать перестановку 1234, а в качестве второй строки — одну из найденных четных перестановок. Итак,

$$A_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1234 \\ 1234 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234 \\ 1342 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234 \\ 1423 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234 \\ 2431 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234 \\ 2314 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234 \\ 2143 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234 \\ 3124 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234 \\ 3241 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234 \\ 3412 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234 \\ 4321 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234 \\ 4213 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234 \\ 4132 \end{pmatrix} \right\}$$

или, разлагая каждую подстановку в произведение независимых циклов, получим:

$$A_4 = \{e = (1), (234), (243), (124), (123), (12) \cdot (34) = a, (132), (134), (13) \cdot (24) = b, (14) \cdot (23) = c, (143), (142)\}.$$

2) Сравнивая группу  $A_4$  с множеством  $V$ , видим, что  $V$  является подмножеством группы  $A_4$ .

Применяя правило умножения подстановок, получим таблицу умножения для  $V$  (таблица 3).

Как видно из таблицы, умножение в  $V$  является бинарной операцией, а обратными элементами для элементов множества  $V$  являются снова элементы из  $V$ . Поэтому  $V$  есть подгруппа группы  $A_4$ , называемая *группой Клейна*.

Таблица 3

	$e$	$a$	$b$	$c$
$e$	$e$	$a$	$b$	$c$
$a$	$a$	$e$	$c$	$b$
$b$	$b$	$c$	$e$	$a$
$c$	$c$	$b$	$a$	$e$

5. Докажите, что множество четных чисел является подгруппой аддитивной группы  $\mathbf{Z}$  целых чисел. Является ли множество нечетных чисел подгруппой группы  $\mathbf{Z}$ ?

6. Пусть  $n$  — заданное натуральное число. Показать, что множество целых чисел, кратных  $n$ , является подгруппой аддитивной группы  $\mathbf{Z}$ .

7. Покажите, что любая подгруппа аддитивной группы  $\mathbf{Z}$  состоит из всех чисел, кратных некоторому натуральному числу  $n$ .

8. Докажите, что множество целых степеней числа 3 является подгруппой мультипликативной группы  $\mathbf{Q} \setminus \{0\}$ . Запишите эту подгруппу символически. Является ли она циклической? Каков порядок элемента, порождающего эту подгруппу?

9. Найдите порядки элементов  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  мультипликативной группы невырожденных матриц второго порядка.

10. Приведите примеры нескольких подгрупп (не циклических) мультипликативной группы невырожденных квадратных матриц второго порядка.

11. Найдите порядок каждого элемента симметрической группы  $S_3$  третьей степени, а затем выясните, какие циклические подгруппы  $S_3$  они порождают. Сколько всего различных подгрупп имеет группа  $S_3$ ? Является ли  $A_3$  циклической подгруппой группы  $S_3$ ? Каковы ее образующие? ( $A_3$  — знакопеременная группа третьей степени.)

12. Найдите порядки всех элементов:

а) в группе самосовмещений ромба (упр. 16 § 3);

б) в группе самосовмещений правильного треугольника (упр. 13 § 3).

Являются ли эти группы циклическими? А группа поворотов треугольника?

13. Пусть  $\mathbf{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  — множество всевозможных остатков, получаемых при делении целых чисел на  $n$ . Зададим на множестве  $\mathbf{Z}_n$  следующую бинарную операцию  $\oplus$  (сложение по модулю  $n$ ): будем складывать данные остатки как обычно, а за результат принимать остаток от деления полученного числа на  $n$  (так, например, сложение  $\oplus$  по модулю 4 дает  $2 \oplus 1 = 3$ ,  $2 \oplus 2 = 0$ ,  $2 \oplus 3 = 1$ ,  $3 \oplus 3 = 2$  и т. д.). Докажите, что система  $\langle \mathbf{Z}_n; \oplus \rangle$  образует группу, причем эта группа циклическая порядка  $n$ . Напишите таблицу сложения для группы  $\mathbf{Z}_5$ .

**Примечание.** Группа  $\mathbf{Z}_n$  называется *группой остатков по модулю  $n$*  или *группой вычетов по модулю  $n$* .

14. Представьте в виде произведения независимых циклов следующие подстановки:

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 7 & 5 & 1 & 8 & 6 & 3 \end{pmatrix},$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 6 & 5 & 1 & 8 & 7 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 8 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

15. Подстановки, о которых идет речь в упражнении 14, представьте в виде произведения транспозиций. Какие из них являются четными подстановками?

16. Следующие элементы симметрической группы  $S_8$ , заданные разложением на независимые циклы, запишите в обычной форме подстановок:

$$u = (123) \cdot (4568), v = (34) \cdot (52618), t = (874312) \cdot (56), w = (5786).$$

17. Найдите порядок элемента  $a = (1243) \in S_4$  и постройте циклическую подгруппу группы  $S_4$ , порожденную элементом  $a$ .

18. Докажите, что пересечение двух (или нескольких) подгрупп любой группы является также подгруппой этой группы.

19. Найдите пересечение подгрупп  $A$  и  $B$  аддитивной группы  $\mathbf{Z}$ , если:

а)  $A = (2) = \{x | x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}$ ,  $B = (3)$ ;

б)  $A = (6)$ ,  $B = (8)$ .

20. Какой порядок имеет элемент  $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$  симметрической группы  $S_6$  и какую циклическую подгруппу этой группы он порождает?

21. Постройте циклические подгруппы группы  $S_4$ , порожденные ее элементами  $a = (1342)$  и  $b = (1243)$ , а затем найдите пересечение этих подгрупп. Является ли  $(a) \cap (b)$  абелевой подгруппой группы  $S_4$ ?

22. Докажите, что если порядок элемента  $a$  группы равен  $m$  и  $a^n = e$ , то  $n$  делится на  $m$ .

23. Докажите, что если порядок элемента  $a$  группы равен  $m$ , то  $a^s = a^t$  в том и только в том случае, когда  $s - t$  делится на  $m$ .

24. Докажите, что если порядок элемента  $a$  группы равен  $m$ , то порядок элемента  $a^k$  равен  $\frac{m}{(m, k)}$ , где  $(m, k)$  — наибольший общий делитель чисел  $m$  и  $k$ .

25. В некоторой циклической группе  $G$  порядка  $m$  элемент  $a$  является образующим. При каких значениях  $k$  элемент  $a^k$  будет тоже образующим группы  $G$ ?

26. Найдите все образующие в группе поворотов правильного 12-угольника.

27. В симметрической группе  $S_6$  подстановок шестой степени найдите порядки элементов  $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $a^3$ , а также обратные им элементы.

28. Выясните, для каких  $m$  в симметрической группе  $S_4$  подстановок четвертой степени найдутся элементы порядка  $m$ .

29. Пусть элемент  $a$  имеет простой порядок  $p$  и  $m$  — произвольное целое число. Докажите, что элемент  $a^m$  либо совпадает с единичным элементом, либо имеет порядок  $p$ .

30. В группе всех поворотов плоскости вокруг некоторой точки этой плоскости установите:

а) порядки элементов  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , представляющих собой повороты соответственно на углы  $\pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$  и  $\frac{3\pi}{2}$  радиан;

б) поворот на какой угол дает элемент порядка 20;

в) повороты на какие углы являются элементами конечного порядка

31. Найдите подгруппу  $G$  всех самосовмещений данной прямой линии в группе всех перемещений плоскости.

32. Докажите, что множество, состоящее из матриц  $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $a = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , является подгруппой мультипликативной группы невырожденных матриц 2-го порядка. Является ли эта подгруппа абелевой? Является ли она циклической? Каковы ее образующие элементы?

33. Докажите, что все подгруппы в любой циклической группе порядка  $n$  имеют вид  $\{e, a^d, a^{2d}, \dots, a^{\frac{n}{d}-1}\}$ , где  $d$  — любой натуральный делитель числа  $n$ ,  $a$  — образующая группы.

34. Сколько подгрупп имеет группа (см. упр. 32)

$$\left\{ e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}?$$

35. Найдите все подгруппы у циклической группы, образующей которой является подстановка  $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ .

36. Какой вид имеют все подгруппы группы  $\mathbf{Z}_n$  вычетов по модулю  $n$ ?

37. Найдите все подгруппы в циклических группах: а)  $\mathbf{Z}_5$ ,  $\mathbf{Z}_8$ ,  $\mathbf{Z}_{10}$ ; б) в группе самосовмещений квадрата.

38. Докажите, что все подгруппы бесконечной циклической группы имеют вид  $\{\dots, a^{-2r}, a^{-r}, a^0 = e, a^r, a^{2r}, \dots\}$ , где  $a$  — образующая группы,  $r$  — произвольное натуральное число.

39. Докажите, что в любой бесконечной группе бесконечно много подгрупп.

У к а з а н и е. Рассмотрите два случая: 1) в группе имеется хотя бы один элемент бесконечного порядка; 2) все элементы имеют конечные порядки.

40. Выявите группы, у которых множество всех подгрупп состоит: а) из одной подгруппы; б) из двух подгрупп; в) из трех подгрупп.

41. Докажите, что любая циклическая группа порядка  $n$  изоморфна группе  $\mathbf{Z}_n$  вычетов по модулю  $n$ .

42. Пусть  $\varphi$  — изоморфизм группы  $G_1$  на группу  $G_2$  и  $\varphi(g) = h$ . Докажите, что элементы  $g$  и  $h$  имеют равные порядки.

43. Объясните, почему группа поворотов квадрата не изоморфна группе самосовмещений ромба.



44. Найдите с точностью до изоморфизма все группы, содержащие: а) два элемента; б) три элемента; в) четыре элемента; г) пять элементов.

45. Является ли циклической группой группа самосовмещений квадрата (см. 17 § 3)?

46. В группе самосовмещений квадрата найдите подгруппу, изоморфную группе  $\mathbf{Z}_4$  вычетов по модулю 4.

47. Даны две группы  $G$  и  $H$ . Докажите, что декартово произведение  $G \times H$  является также группой относительно бинарной операции  $(g_1; h_1) \cdot (g_2; h_2) = (g_1 g_2; h_1 h_2)$ , где  $g_1 g_2 \in G$ ,  $h_1 h_2 \in H$ . Эта группа называется *прямым произведением* групп  $G$  и  $H$ .

48. Пусть в группе  $G$   $n$  элементов, а в группе  $H$  —  $k$  элементов. Каков порядок группы  $G \times H$ ?

49. Пусть  $G_1$  — подгруппа группы  $G$  и  $H_1$  — подгруппа группы  $H$ . Докажите, что  $G_1 \times H_1$  — подгруппа группы  $G \times H$ .

50. В циклической группе (а) 8-го порядка найдите:

а) все образующие;

б) порядки всех ее элементов;

в) все такие элементы  $b$  и  $c$ , которые имеют взаимно простые порядки.

Убедитесь, что если элементы  $b$  и  $c$  имеют взаимно простые порядки, то:

г) пересечение циклических подгрупп  $\langle b \rangle$  и  $\langle c \rangle$  содержит лишь единицу группы;

д) порядок произведения  $bc$  равен произведению порядков сомножителей, т. е.\*

$$O(bc) = O(b) \cdot O(c).$$

51. Докажите, что:

а) если элементы  $b$  и  $c$  некоторой группы  $G$  перестановочны, т. е.  $bc = cb$ , и имеют взаимно простые порядки, то порядок произведения  $bc$  равен произведению порядков сомножителей;

б) если элементы  $b$  и  $c$  группы  $G$  перестановочны, имеют конечные порядки и пересечение циклических подгрупп  $\langle b \rangle$ ,  $\langle c \rangle$  содержит лишь единицу  $e$  группы  $G$ , т. е.

$$\langle b \rangle \cap \langle c \rangle = \{e\}, \quad (1)$$

то порядок произведения  $bc$  равен наименьшему общему кратному порядков сомножителей;

в) на примере группы из упражнения 50 покажите, что без условия (1) порядок произведения  $bc$  не определяется однозначно порядками сомножителей  $b$  и  $c$ .

## § 5. КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ

### Примеры

1. Выясним, является ли множество  $G = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$  группой относительно операции, заданной таблицей Кэли (см. таблицу 4).

\*  $O(a)$  мы обозначаем порядок элемента  $a$  в группе.

**Решение.** Для того чтобы непосредственно не проверять, обладает ли заданная операция групповыми свойствами (ассоциативностью и обратимостью), мы воспользуемся теоремой Кэли. Таблица 4 показывает, что элементы  $b_1, b_2, b_3, b_4$  (см. заглавный столбец) после выполнения операции  $\circ$ , т. е. после их умножения на элемент  $b_2$  (второй элемент в заглавной строке), дают соответственно элементы  $b_2, b_3, b_4, b_1$ . На основании индексов элементов  $b_1, b_2, b_3, b_4$  и индексов полученных элементов элементу  $b_2$  можно поставить в соответствие подстановку  $p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ . Аналогично эле-

Таблица 4

	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$
$b_1$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$
$b_2$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_1$
$b_3$	$b_3$	$b_4$	$b_1$	$b_2$
$b_4$	$b_4$	$b_1$	$b_2$	$b_3$

Таблица 5

	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$
$p_1$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$
$p_2$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_1$
$p_3$	$p_3$	$p_4$	$p_1$	$p_2$
$p_4$	$p_4$	$p_1$	$p_2$	$p_3$

ментам  $b_3, b_4, b_1$  соответствуют подстановки  $p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

Для множества  $G_1 = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$  составим таблицу умножения (см. таблицу 5).

В каждой строке и в каждом столбце таблицы 5 имеются все элементы множества  $G_1$ , а это значит, что операция умножения в  $G_1$  обратима. Кроме того, из теории известно, что умножение подстановок одной и той же степени ассоциативно. Следовательно,  $G_1$  — группа.

Если в таблице 5 заменить элементы группы  $G_1$  соответствующими элементами множества  $G$ , то получим таблицу, совпадающую с заданной таблицей 4. А это значит, что и данное множество  $G$  также является группой, изоморфной подгруппе  $G_1$  симметрической группы  $S_4$ .

2. Докажем, что множество  $G$  самосовмещений правильного тетраэдра, оставляющих неподвижной одну из его вершин — точку  $A$ , есть группа. Составим для нее таблицу Кэли и изоморфно отобразим  $G$  на одну из подгрупп симметрической группы  $S_6$  шестой степени.

**Решение.** Множество  $G$  состоит из поворотов  $a_1, a_2, a_3$  тетраэдра вокруг его высоты  $AO$  на углы  $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$  радиан и из симметрий  $a_4, a_5, a_6$  тетраэдра относительно его плоскостей симметрии  $A1K_1, A2K_2, A3K_3$  (рис. 2):

$$G = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}.$$

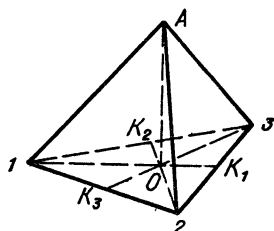


Рис. 2

Каждое из указанных самосовмещений тетраэдра переводит вершины 1, 2, 3 его основания в некоторые вершины этого же основания. Так,  $a_2$ —это такой поворот тетраэдра вокруг оси  $AO$ , который переводит его вершины 1, 2, 3 соответственно в вершины 2, 3, 1, а потому элементу  $a_2$  соответствует подстановка  $p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ . Аналогично

получим, что элементам  $a_1, a_3, a_4, a_5, a_6$  соответствуют подстановки

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, p_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, p_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Но найденные подстановки составляют симметрическую группу  $S_3$  третьей степени, а потому и множество  $G$  является группой. Заполнив таблицу умножения элементов группы  $S_3$ , получим таблицу Кэли для группы  $G$  (см. табл. 6).

Так же как и при решении примера 1, по таблице 6 на основании теоремы Кэли получим, что отображение

$$\begin{aligned} a_1 &\rightarrow g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, a_2 \rightarrow g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \\ a_3 &\rightarrow g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}, a_4 \rightarrow g_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \\ a_5 &\rightarrow g_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, a_6 \rightarrow g_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

является изоморфным отображением группы  $G$  на подгруппу  $G_1 = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6\}$  симметрической группы  $S_6$  шестой степени.

Таблица 6

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$
$a_1$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$
$a_2$	$a_2$	$a_3$	$a_1$	$a_5$	$a_6$	$a_4$
$a_3$	$a_3$	$a_1$	$a_2$	$a_6$	$a_4$	$a_5$
$a_4$	$a_4$	$a_6$	$a_5$	$a_1$	$a_3$	$a_2$
$a_5$	$a_5$	$a_4$	$a_6$	$a_2$	$a_1$	$a_3$
$a_6$	$a_6$	$a_5$	$a_4$	$a_3$	$a_2$	$a_1$

3. Докажем, что множество

$$F = \left\{ f_1(x) \neq x, f_2(x) = -x, f_3(x) = \frac{1}{x}, f_4(x) = -\frac{1}{x} \right\}$$

вещественных функций, заданных на  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ , является группой относительно операции умножения преобразований:

$$(f_i f_j)(x) = f_i(f_j(x)), \text{ где } i, j = 1, 2, 3, 4.$$

**Доказательство.** Подсчитаем  $f_2 f_3$ . Пусть  $x$  — любое число из  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ . Преобразование  $f_2$  переводит (отображает) число  $x$  в число  $u = -x$ , а преобразование  $f_3$  переводит число  $u$  в число  $\frac{1}{u} = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = f_4(x)$ . Следовательно,  $(f_2 f_3)(x) = f_4(x)$  для любого  $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ , и потому  $f_2 f_3 = f_4$ .

Подсчитаем  $f_3 f_4$ :  $f_3$  переводит число  $x$  в  $u = \frac{1}{x}$ , а преобразование  $f_4$  переводит  $u$  в  $-\frac{1}{u} = -\frac{1}{\frac{1}{x}} = -x = f_2(x)$ . Следовательно,

$$f_3 f_4 = f_2.$$

Аналогично находим остальные произведения  $f_i \cdot f_j$ . Получаем таблицу Кэли (см. таблицу 7), которая показывает, что заданная на  $F$  бинарная операция имеет нейтральный элемент (преобразование  $f_1$ ), а каждый элемент множества  $F$  сам себе обратен. Кроме того, как известно из теории, умножение преобразований ассоциативно. Следовательно,  $F$  — группа.

Таблица 7

	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
$f_1$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
$f_2$	$f_2$	$f_1$	$f_4$	$f_3$
$f_3$	$f_3$	$f_4$	$f_1$	$f_2$
$f_4$	$f_4$	$f_3$	$f_2$	$f_1$

#### Упражнения для самостоятельного решения

4. На конечном множестве  $G$  операция задана таблицей Кэли. С помощью этой таблицы определите, коммутативна ли данная операция и обратима ли она.

5. На множестве  $M = \{a, b, c\}$  бинарная операция задана таблицей 8. Выясните, обладает ли множество  $M$  нейтральным элементом относительно заданной бинарной операции, является ли заданная операция коммутативной, ассоциативной и обратимой. Является ли  $M$  полугруппой, группой?

Таблица 8

	$a$	$b$	$c$
$a$	$a$	$a$	$a$
$b$	$a$	$b$	$c$
$c$	$a$	$c$	$b$

6. Выясните, является ли множество  $G = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  группой относительно операции, заданной таблицей 9.

Таблица 9

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
$a_1$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
$a_2$	$a_2$	$a_1$	$a_4$	$a_3$
$a_3$	$a_3$	$a_4$	$a_2$	$a_1$
$a_4$	$a_1$	$a_3$	$a_1$	$a_2$

7. Для группы самосовмещений ромба (см. упр. 16 § 3) составьте таблицу Кэли. Найдите взаимно обратные элементы и выясните, коммутативна ли данная группа.

8. Каждая из функций множества

$$F = \left\{ f_0 = x, f_1 = \frac{1}{x}, f_2 = 1 - x, f_3 = \frac{x}{x-1}, f_4 = \frac{x-1}{x}, f_5 = \frac{1}{1-x} \right\}$$

является преобразованием множества  $M = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ . Докажите, что  $F$  — группа относительно умножения преобразований, составьте для нее таблицу Кэли. Найдите нейтральный элемент и все элементы, обратные самим себе. С помощью таблицы выясните, является ли группа  $F$  коммутативной, и найдите преобразования  $\varphi$  и  $\psi$ , удовлетворяющие уравнениям  $f_3\varphi = f_1$ ,  $\psi f_3 = f_1$ .

9. Докажите, что группа  $F$ , о которой идет речь в упражнении 8, изоморфна симметрической группе  $S_3$  третьей степени.

10. На множестве  $G = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$  задана операция со следующей таблицей Кэли:

Таблица 10

	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$
$c_1$	$c_3$	$c_4$	$c_1$	$c_2$
$c_2$	$c_4$	$c_3$	$c_2$	$c_1$
$c_3$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$
$c_4$	$c_2$	$c_1$	$c_4$	$c_3$

Докажите, что  $G$  — группа относительно заданной операции; укажите подгруппу симметрической группы  $S_4$  четвертой степени, которой изоморфна группа  $G$ ; изоморфно отобразите группу  $G$  на группу самосовмещений ромба.

11. Фигура  $\Phi$  составлена из двух равных равнобедренных треугольников, имеющих общую вершину  $O$  и расположен-

ных так, что боковые стороны одного являются продолжением боковых сторон другого (рис. 3). Найдите подгруппу  $G$  всех самосовмещений фигуры  $\Phi$  в группе всех перемещений плоскости. Представьте элементы этой подгруппы подстановками четвертой степени и составьте таблицу Кэли.

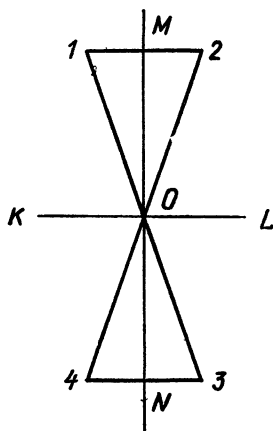


Рис. 3

Выясните, коммутативна ли подгруппа  $G$ .

12. Элементы группы  $G$  всех самосовмещений квадрата (см. упр. 17 § 3) представьте подстановками четвертой степени. Составьте для группы  $G$  таблицу Кэли. Изоморфно отобразите группу  $G$  на одну из подгрупп симметрической группы  $S_8$  восьмой степени.

13. Группу самосовмещений правильного треугольника (см. упр. 13 § 3) изоморфно отобразите на симметрическую группу  $S_3$ .

14. Найдите все оси правильного тетраэдра и все повороты вокруг осей, совмещающие тетраэдр с самим собой. Докажите, что множество всех таких поворотов тетраэдра является группой, изоморфной знакопеременной группе  $A_4$  четвертой степени.

**Примечание.** Вышеуказанные самосовмещения правильного тетраэдра образуют так называемую группу поворотов тетраэдра.

15. Опишите группу всех самосовмещений правильного тетраэдра и докажите, что она изоморфна симметрической группе  $S_4$  четвертой степени.

16. Покажите, что группа самосовмещений ромба изоморфна аддитивной группе  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  (см. упр. 16 § 3).

17. Докажите, что при любом натуральном  $n \geq 3$  симметрическая группа  $S_n$  некоммутативна.

18. Докажите, что при любом натуральном  $n \geq 4$  знакопеременная группа  $A_n$  некоммутативна.

19. Докажите, что симметрическая группа  $S_n$  при любом натуральном  $n \geq 5$  содержит подгруппу, изоморфную знакопеременной группе  $A_5$ .

20. Докажите, что любая четная подстановка пятой степени, отличная от тождественной, разлагается на независимые циклы только одним из следующих трех способов: а)  $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5)$ ; б)  $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$ ; в)  $(\alpha_1 \alpha_2) \cdot (\alpha_3 \alpha_4)$ .

## § 6. СМЕЖНЫЕ КЛАССЫ ПО ПОДГРУППЕ. ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА

### Примеры

1. Найдем левое и правое разложения симметрической группы  $S_3 = \{e = (1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$

$$a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad a_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

по ее подгруппе  $A = \{e, a_1\}$ . Совпадают ли они между собой?

**Решение.** а) Найдем левое разложение группы  $S_3$ . В качестве первого левого класса можно взять смежный класс элемента  $e$ , т. е. саму подгруппу  $A = \{e, a_1\}$ . Возьмем любой элемент из  $S_3$ , не вошедший в первый класс, например элемент  $a_2$ , и умножим его справа на элементы подгруппы  $A$ :  $a_2e = a_2$ ,  $a_2a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = a_4$ .

Получим второй смежный класс:  $a_2A = \{a_2, a_4\}$ . Далее возьмем из группы  $S_3$  элемент, который не вошел в два построенных смежных класса, например  $a_5$ . С его помощью получим третий класс:  $a_5A = \{a_3, a_5\}$ . В построенные классы вошли все элементы группы  $S_3$ , т. е.

$$A \cup a_2A \cup a_5A = \{e, a_1\} \cup \{a_2, a_4\} \cup \{a_3, a_5\} = S_3.$$

Эти классы попарно не пересекаются. Следовательно, классы  $A$ ,  $a_2A$ ,  $a_5A$  составляют искомое левое разложение группы по ее подгруппе  $A$ .

б) Найдем правое разложение группы  $S_3$  по подгруппе  $A$ . Первый правый класс — сама подгруппа  $A = \{e, a_1\}$ , второй правый класс —  $Aa_2 = \{a_2, a_3\}$ . Далее возьмем любой элемент из  $S_3$ , не вошедший в эти классы, например  $a_5$ , и с его помощью получим третий правый класс:  $Aa_5 = \{a_4, a_5\}$ . Так как эти классы не пересекаются и

$$A \cup Aa_2 \cup Aa_5 = \{e, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = S_3,$$

то классы

$$A = \{e, a_1\}, \quad Aa_2 = \{a_2, a_3\}, \quad Aa_5 = \{a_4, a_5\}$$

составляют правое разложение группы  $S_3$  по ее подгруппе  $A$ .

в) Так как  $a_5A \neq Aa_5$ , то левое и правое разложения группы  $S_3$  по подгруппе  $A$  не совпадают.

### Упражнения для самостоятельного решения

2. Найдите все левые смежные классы группы самосовмещений правильного треугольника: а) по подгруппе  $M$  поворотов треугольника; б) по подгруппе  $A = \{e, a\}$ , где  $a$  — одна из симметрий.

3. Известно, что  $H$  — любая подгруппа группы  $G$  и  $x \in H$ . Докажите, что  $xH = Hx = H$ .

4. Докажите, что если элемент  $y$  входит в левый смежный класс  $xH$  по  $H$ , порожденный элементом  $x$ , то смежный класс  $yH$  совпадает со смежным классом  $xH$ .

5. Постройте левое и правое разложения группы  $G$  самосовмещений правильного треугольника: а) по подгруппе  $M$  вращений этого треугольника, результаты сравнить; б) по подгруппе  $A = \{e, a\}$ , где  $a$  — одна из симметрий.

6. Постройте левое и правое разложения группы самосовмещений квадрата (см. упр. 17 § 3) по подгруппе  $A = \{e, a\}$ , где  $a$  — отражение относительно диагонали.

7. Что представляют собой разложения произвольной группы  $G$  по единичной ее подгруппе и по самой  $G$ ?

8. Найдите левое разложение знакопеременной группы  $A_4$  по подгруппе  $B = \{e, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ .

9. Выясните, какие из нижеприведенных подмножеств симметрической группы  $S_5$  пятой степени будут смежными классами по какому-либо подгруппам:

1)  $K_1 = \{(2\ 3\ 4), (1\ 2\ 3\ 4)\}$ ;

2)  $K_2 = \{(1\ 2), (1\ 2\ 3), (1\ 2\ 3\ 4)\}$ .

**У к а з а н и е.** Если левый смежный класс  $K$  по подгруппе  $H$  содержит какой-либо элемент  $g$ , то  $K = gH$ , откуда  $H = g^{-1}K$ ; поэтому следует найти множества  $g^{-1}K_1$  и  $g^{-1}K_2$  и выяснить, являются ли они подгруппами.

10. Докажите, что порядок любого элемента группы является делителем порядка этой группы.

11. Группа содержит 4 элемента, из которых лишь один имеет порядок 4. Какой порядок имеют остальные элементы группы и сколько подгрупп имеет эта группа?

12. Сколько подгрупп может иметь группа  $G$ , содержащая 17 элементов?

13. Может ли в группе порядка  $n$  не быть подгруппы порядка  $m$ , если известно, что  $n$  делится на  $m$ ?

14. Докажите, что всякая группа простого порядка является циклической и любой ее элемент, отличный от  $e$ , является образующей этой группы. Приведите примеры таких групп.

15. Докажите, что все группы одного и того же простого порядка  $p$  изоморфны друг другу.

16. Найдите (с точностью до изоморфизма) все группы порядка 4.

17. Докажите, что всякая группа с пятью или меньшим числом элементов является абелевой.

18. Найдите (с точностью до изоморфизма) все группы порядка 6. Напишите таблицы умножения для этих групп и представьте их элементы подстановками.

19. Докажите, что если  $H$  — подгруппа группы  $G$ , а  $x$  — некоторый элемент из  $G$ , то множество  $H_x = xHx^{-1}$  является подгруппой  $G$ . В группе  $G$  самосовмещений квадрата найдите все подгруппы вида  $H_x = xHx^{-1}$ , где  $H$  — группа поворотов квадрата.

## § 7. НОРМАЛЬНЫЕ ДЕЛИТЕЛИ И ФАКТОР-ГРУППЫ

### Примеры

1. Построим фактор-группу аддитивной группы  $\mathbf{Z}$  по ее подгруппе  $B = (5) = \{x | x = 5k, k \in \mathbf{Z}\}$ . Найдём сумму смежных классов  $3 + B$ ,  $4 + B$  и элемент фактор-группы  $\mathbf{Z}/B$ , противоположный элементу  $2 + B$ .



**Решение.** Аддитивная группа  $\mathbf{Z}$  коммутативна, а потому любая ее подгруппа, в том числе и данная циклическая подгруппа  $B$ , является нормальным делителем группы  $\mathbf{Z}$ . Следовательно, оба разложения группы  $\mathbf{Z}$  по подгруппе  $B$  одинаковы — левые и правые классы соответственно совпадут и из них составится одна определенная фактор-группа. Разбиваем группу  $\mathbf{Z}$  с помощью ее подгруппы  $B$  на попарно непересекающиеся классы. За первый смежный класс берем саму подгруппу  $B = (5) = \{\dots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \dots\} = 0 + B$  — этот класс состоит из всех тех целых чисел, которые кратны 5; второй смежный класс порождаем с помощью какого-либо целого числа, не вошедшего в первый класс, например с помощью числа 1, непосредственно следующего за 0, путем сложения 1 с элементами подгруппы  $B$ :  $1 + B = \{x | x = 1 + 5k, k \in \mathbf{Z}\} = \{\dots, -14, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \dots\}$ . В этот класс войдут, как видим, все те целые числа, которые при делении на 5 дают остаток 1. Третий класс образуем из всех тех целых чисел, которые при делении на 5 дают остаток 2; это будет класс  $2 + B = \{x | x = 2 + 5k, k \in \mathbf{Z}\}$ . Аналогично четвертый класс  $3 + B = \{x | x = 3 + 5k, k \in \mathbf{Z}\}$ ; пятый класс  $4 + B$ . А так как при делении целых чисел на 5 остатками могут быть лишь числа 0, 1, 2, 3, 4, то с помощью подгруппы  $B = (5)$  никаких других смежных классов, которые были бы отличны от найденных, получить нельзя. Построенные нами смежные классы полностью исчерпывают элементы данной группы  $\mathbf{Z}$ , т. е.

$$B \cup [1 + B] \cup [2 + B] \cup [3 + B] \cup [4 + B] = \mathbf{Z}.$$

Как легко заметить, полученные классы не имеют общих элементов, т. е. попарно не пересекаются. Следовательно, они составляют разбиение множества  $\mathbf{Z}$ , т. е. разложение группы  $\mathbf{Z}$  по нормальному делителю  $B$ . Итак,  $\mathbf{Z}/B = \{B, 1 + B, 2 + B, 3 + B, 4 + B\}$  есть искомая фактор-группа. Она является также аддитивной группой. По правилу сложения элементов в аддитивной фактор-группе имеем:

$$\begin{aligned} (3 + B) + (4 + B) &= (3 + 4) + B = 7 + B = \\ &= \{x | x = 7 + 5k = 2 + (5 + 5k) = 2 + 5t, t \in \mathbf{Z}\} = 2 + B; \\ (3 + B) + B &= (3 + B) + (0 + B) = (3 + 0) + B = 3 + B. \end{aligned}$$

Аналогично  $B + (3 + B) = 3 + B$ , поэтому элемент  $B$  в группе  $\mathbf{Z}/B$  является нулевым.

Поскольку  $(2 + B) + (3 + B) = (2 + 3) + B = 5 + B = \{x | x = 5 + 5k = 5(1 + k) = 5s, s \in \mathbf{Z}\} = B$ , элемент  $3 + B$  является противоположным для элемента  $2 + B$ .

2. Докажем, что подгруппа  $A_n$  является нормальным делителем симметрической группы  $S_n$   $n$ -й степени.

**Решение.** Группа  $S_n$  состоит из  $n!$  подстановок, а группа  $A_n$  состоит из  $\frac{1}{2} n!$  подстановок. Как при левом, так и при правом разложениях группы  $S_n$  по подгруппе  $A_n$  одним смежным классом

является сама подгруппа  $A_n$ . В этот класс не войдут лишь все нечетные подстановки, число которых также равно  $\frac{1}{2}n!$ . Поскольку всякий другой смежный класс должен состоять из стольких же элементов, сколько их в первом классе, то из тех элементов группы  $S_n$ , которые не вошли в первый класс, можно составить еще только один левый или правый смежный класс, который будет состоять из всех нечетных подстановок группы  $S_n$ , т. е. оба разложения группы по подгруппе  $A_n$  будут одинаковы. А это значит, что  $A_n$  — нормальный делитель. Фактор-группой группы  $S_n$  по нормальному делителю  $A_n$  будет  $S_n/A_n = \{A_n, sA_n\}$ , где  $s$  — любая нечетная подстановка группы  $S_n$ .

3. Охарактеризуем все нормальные делители в группе  $Z_n$  вычетов по модулю  $n$  и фактор-группы по ним.

**Решение.** Так как аддитивная группа  $Z_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  (группа вычетов по модулю  $n$ ) является циклической, а циклические группы коммутативны, то все ее подгруппы являются нормальными делителями. Но любая подгруппа группы  $Z_n$  на основании упражнения 33 § 4 имеет вид  $\{0, d, 2d, \dots, (n-d)\}$ , где  $d$  — любой натуральный делитель числа  $n$ ,  $n = dk$  или  $n - d = dk - d = (k-1)d$ . Таким образом, нормальный делитель будет состоять из  $k$  элементов и иметь следующий вид:  $A = \{0, d, 2d, \dots, (k-1)d\}$ . Фактор-группа группы  $Z_n$  по этому нормальному делителю  $A$  будет состоять из  $d$  смежных классов:

$$\begin{aligned} A + 0 &= A = \{0 = 0 \cdot d, 1d, 2d, \dots, (k-1)d\} = \{x|x = ds\}, \\ A + 1 &= \{1, d + 1, 2d + 1, \dots, (k-1)d + 1\} = \{x|x = ds + 1\}, \\ A + 2 &= \{2, d + 2, 2d + 2, \dots, (k-1)d + 2\} = \{x|x = ds + 2\}, \\ &\dots \end{aligned}$$

$A + d - 1 = \{x|x = ds + d - 1\}$ , где  $s$  пробегает все целые числа от 0 до  $k-1$ .

Следовательно,

$$Z_n/A = \{A, A + 1, A + 2, \dots, A + d - 1\}.$$

#### Упражнения для самостоятельного решения

4. Докажите, что если порядок подгруппы в 2 раза меньше порядка самой группы, то эта подгруппа является нормальным делителем группы.

5. Почему в группе самосовмещений квадрата подгруппа поворотов квадрата является нормальным делителем? Почему в группе поворотов квадрата подгруппа, порожденная центральной симметрией, является нормальным делителем?

**Указание.** Воспользуйтесь задачей 4.

6. Докажите, что подгруппа  $H$  группы  $G$  является нормальным делителем тогда и только тогда, когда для любого элемента  $a$  из  $H$  и любого элемента  $g$  из  $G$  элемент  $gag^{-1}$  содержится в  $H$ .

**Примечание.** Элемент  $gag^{-1}$  называется сопряженным элементу  $a$ .

7. В группе всех самосовмещений квадрата взята подгруппа  $H = \{a_0, a\}$ , где  $a_0$  — тождественное преобразование,  $a$  — отражение относительно одной из диагоналей квадрата. Является ли  $H$  нормальным делителем?

8. Приведите пример, показывающий, что нормальный делитель нормального делителя группы может не быть нормальным делителем самой группы.

9. Выясните, является ли нормальным делителем группы самосовмещений квадрата ее подгруппа  $A = \{a_0, a\}$ , где  $a$  — отражение квадрата относительно его центра и  $a_0$  — тождественное перемещение.

10. Найдите все нормальные делители в симметрической группе  $S_3$  третьей степени.

11. Докажите, что центр группы всегда не пуст.

**Примечание** Центром группы называется множество тех ее элементов, которые перестановочны со всеми элементами этой группы.

12. Докажите, что центр группы является ее подгруппой и, более того, нормальным делителем группы.

13. Докажите, что всякая подгруппа центра группы является нормальным делителем группы.

14. Докажите, что в мультипликативной группе  $G$  вещественных невырожденных матриц  $n$ -го порядка подмножество  $H$  матриц, определитель которых равен 1, является нормальным делителем. Как можно охарактеризовать смежные классы по  $H$ ?

15. Докажите, что группа Клейна (задача 4 § 4) является нормальным делителем симметрической группы  $S_4$  четвертой степени.

16. Докажите, что если  $H_1$  и  $H_2$  — нормальные делители соответственно в группах  $G_1$  и  $G_2$ , то  $H_1 \times H_2$  — нормальный делитель в группе  $G_1 \times G_2$ .

17. Докажите, что в прямом произведении  $G_1 \times G_2$  групп  $G_1$  и  $G_2$  подмножество  $G_1 \times \{e_2\}$  является нормальным делителем группы  $G_1 \times G_2$  ( $e_2$  — единичный элемент группы  $G_2$ ).

18. Составьте фактор-группу группы самосовмещений квадрата по ее нормальному делителю  $A = \{a_0, a\}$  (см. упр. 9 § 7) и таблицу Кэли для этой фактор-группы.

19. Составьте фактор-группу группы  $\mathbf{Z}_8$  вычетов по модулю 8 по ее нормальному делителю  $H = \{0, 4\}$  и таблицу сложения ее элементов.

20. Докажите, что если группа  $G$  коммутативна, то и любая ее фактор-группа также коммутативна. Верно ли обратное утверждение?

21. Докажите, что если группа является циклической с образующей  $a$ , то и фактор-группа этой группы по любому ее нормальному делителю  $H$  будет также циклической с образующей  $aH$ .

22. Почему подгруппа  $A = \{x \mid x = 3k, k \in \mathbf{Z}\}$  аддитивной группы  $\mathbf{Z}$  является нормальным делителем группы  $\mathbf{Z}$ ? Каков индекс подгруппы  $A$ ? Постройте фактор-группу  $\mathbf{Z}/A$ . Будет ли она цикли-

ческой? Если да, то каков будет ее образующий элемент и как ее элементы могут быть записаны через этот образующий элемент?

**Примечание.** Если число смежных классов (левых или правых) группы  $G$  по ее подгруппе  $H$  конечно, то это число называют индексом подгруппы  $H$  (в группе  $G$ ).

23. Постройте фактор-группу  $\mathbf{Z}/A$ , где  $A = (6) = \{x | x = 6k, k \in \mathbf{Z}\}$ . Будет ли она абелевой? Найдите  $(6 + A) + (9 + A)$  и  $(9 + A) + (6 + A)$ .

24. Постройте фактор-группу  $\mathbf{Z}/A \cap B$ , где  $A = (6)$ ,  $B = (4)$ , и составьте для нее таблицу сложения. Найдите элемент, противоположный элементу  $5 + M$ , где  $M = A \cap B$ .

25. Будет ли  $A = \{x | x = 12k, k \in \mathbf{Z}\} = (12)$  подгруппой, нормальным делителем группы  $M = \{y | y = 3k, k \in \mathbf{Z}\} = (3)$ ? Ответ обоснуйте. Постройте фактор-группу  $M/A$  и таблицу сложения ее элементов.

26. Для знакопеременной группы  $A_4$  четвертой степени (см. пример 4 § 4) постройте ее циклическую подгруппу, порожденную элементом  $g = (1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ . Найдите оба разложения группы  $A_4$  по подгруппе  $\langle g \rangle$  и сравните результаты. Является ли подгруппа  $\langle g \rangle$  нормальным делителем в группе  $A_4$  и можно ли построить фактор-группу группы  $A_4$  по подгруппе  $\langle g \rangle$ ?

27. Найдите оба разложения знакопеременной группы  $A_4$  четвертой степени по ее подгруппе

$$V = \{e = (1), a = (12)(34), b = (13)(24), c = (14)(23)\}$$

(см. пример 4 § 4) и сравните результаты. Является ли подгруппа  $V$  нормальным делителем группы  $A_4$ ? Если является, то постройте фактор-группу  $A_4/V$  и таблицу умножения ее элементов.

28. Составьте фактор-группу  $\mathbf{Z}_4/D$  аддитивной группы  $\mathbf{Z}_4$  вычетов по модулю 4 по ее нормальному делителю  $D = \{0, 2\}$ . Выясните, будет ли  $\mathbf{Z}_4/D \cong \mathbf{Z}_2$ .

29. Докажите, что если  $H$  — нормальный делитель группы  $S_n$  и  $a$  — подстановка из  $H$ , отличная от тождественной, то  $H$  содержит все подстановки, разлагающиеся на независимые циклы той же длины, что и подстановка  $a$ .

**Примечание.** Рассмотрите разложение  $a$  на независимые циклы. Если, например,  $a = (123)(45)$ , то докажите, что  $H$  содержит все подстановки вида  $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)(\alpha_4\alpha_5)$ , показав, что  $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)(\alpha_4\alpha_5) = g^{-1}ag$ , где  $g$  — любая подстановка, при которой  $\alpha_1 \rightarrow 1, \alpha_2 \rightarrow 2, \alpha_3 \rightarrow 3, \alpha_4 \rightarrow 4, \alpha_5 \rightarrow 5$ .

30. Докажите, что группа  $A_5$  не содержит нормальных делителей, кроме единичной подгруппы и всей группы.

31. На множестве  $G$  всевозможных троек целых чисел определена бинарная операция  $(k_1, k_2, k_3) \circ (s_1, s_2, s_3) = (k_1 + s_1, k_2 + s_2, k_3 + s_3)$ . Докажите, что система  $G = \langle G; \circ \rangle$  является группой и что подгруппа  $H = \{x | x = (k, 0, 0), k \in \mathbf{Z}\}$  является нормальным делителем группы  $G$ .

32. Найдите все нормальные делители и фактор-группы по ним в следующих группах: а)  $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ ; б) в группе самосовмещений правильного треугольника; в) в группе  $G$  самосовмещений квадрата.

33. Найдите разложение симметрической группы  $S_4$  по группе Клейна  $V$  (см. упр. 4 § 4) и составьте фактор-группу  $S_4/V$ .

34. Докажите, что фактор-группа симметрической группы по группе Клейна изоморфна симметрической группе  $S_3$ .

35. Докажите, что если  $G$  — мультипликативная группа вещественных невырожденных матриц порядка  $n$ ,  $H$  — ее нормальный делитель, состоящий из матриц порядка  $n$ , определитель каждой из которых равен 1 (см. упр. 14 § 7), то фактор-группа  $G/H$  изоморфна мультипликативной группе  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$  действительных чисел, отличных от нуля.

У к а з а н и е. Учтите упражнение 14.

36. Докажите, что если  $M$  — нормальный делитель некоторой группы  $G$ ,  $M_1$  — подгруппа группы  $G$ ,  $\bar{M}_1$  — подмножество группы  $G/M$ , состоящее из тех классов, в каждый из которых входит хотя бы один элемент из  $M_1$ , то  $\bar{M}_1$  — подгруппа группы  $G/M$ ; если же  $M \in M_1$ , то  $M$  — нормальный делитель группы  $M_1$  и  $\bar{M}_1 = M_1/M$ .

37. Докажите, что если  $G$  — группа,  $A$  — ее нормальный делитель,  $\bar{H}$  — подгруппа фактор-группы  $G/A$ , то подмножество  $H$  группы  $G$ , являющееся объединением всех смежных классов, входящих в  $\bar{H}$ , является подгруппой группы  $G$ , содержащей  $A$ . Докажите также, что если  $\bar{H}$  — нормальный делитель группы  $G/A$ , то  $H$  — нормальный делитель группы  $G$ .

38. Найдите все подгруппы симметрической группы  $S_4$ , содержащие группу Клейна, и определите, какие из этих подгрупп являются нормальными делителями группы  $S_4$ .

39. Могут ли две неизоморфные группы иметь изоморфные нормальные делители и изоморфные фактор-группы по ним?

## § 8. ГОМОМОРФНЫЕ ОБРАЗЫ ГРУППЫ

### Примеры

1. Докажем, что мультипликативную группу  $M$  невырожденных матриц порядка  $n$  ( $n \geq 1$ ) можно гомоморфно отобразить на мультипликативную группу  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$  действительных чисел, отличных от нуля.

Р е ш е н и е. Отобразим группу  $M$  в группу  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$  по правилу  $\varphi$ , которое каждой матрице  $A \in M$  ставит в соответствие ее определитель  $|A|$  — элемент из  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ . Так как при этом отображении для любого заданного элемента из  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$  полный прообраз есть непустое множество (так как существует бесконечно много матриц из  $M$ , определитель которых равен заданному действительному числу), то  $\varphi$  является отображением  $M$  на  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ . Более того,

такое отображение сохраняет операцию. Действительно, если  $A, B$  — любые элементы из группы  $M$ , то и  $AB \in M$ , и по теореме об определителе произведения матриц получим:

$$\varphi(AB) = |AB| = |A| \cdot |B| = \varphi(A) \varphi(B).$$

Итак,  $\varphi$  есть отображение группы  $M$  на группу  $R \setminus \{0\}$ , сохраняющее операцию, т. е. гомоморфное отображение.

2. Построим фактор-группу мультипликативной группы  $G = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  рациональных чисел, отличных от нуля, по ее нормальному делителю  $H = \{1, -1\}$ , а затем группу  $G$  гомоморфно отображим на фактор-группу  $G/H$ .

**Решение.** Пусть  $x$  — любое положительное рациональное число. Тогда  $xH = \{x, -x\}$ ,  $(-x)H = \{x, -x\}$ , значит, смежные классы  $xH$  и  $(-x)H$  совпадают. Отсюда следует, что при разложении группы  $G$  по нормальному делителю  $H$  смежные классы можно порождать лишь при помощи положительных рациональных чисел. Итак,  $G/H = \{\{x, -x\} \mid x \in \mathbb{Q}^+\}$ .

Отобразим  $G = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  в  $G/H$  по правилу  $\varphi$ :

$$\varphi(x) = xH = \{x, -x\}.$$

Так как любой смежный класс не пуст, то при отображении  $\varphi$  полный прообраз для любого элемента из  $G/H$  не пуст, а потому  $\varphi$  является отображением группы  $G = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  на группу  $G/H$ . Более того, оно сохраняет операцию: если  $x$  и  $y$  — любые элементы из группы  $G$ , то

$$\varphi(xy) = (xy)H = xHyH = \varphi(x) \varphi(y).$$

Следовательно,  $\varphi$  — гомоморфное отображение группы  $G = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  на группу  $G/H$ .

**Примечание.** Гомоморфное отображение группы на свою фактор-группу называется естественным гомоморфизмом.

### Упражнения для самостоятельного решения

3. Докажите, что если  $\varphi: G \rightarrow F$  — гомоморфизм группы  $G$  на группу  $F$  и при этом группа  $G$  коммутативна, то и группа  $F$  коммутативна. Верно ли обратное утверждение?

4. Докажите, что если  $\varphi_1: G_1 \rightarrow G_2$  и  $\varphi_2: G_2 \rightarrow G_3$  гомоморфизмы, то и  $\varphi_1 \cdot \varphi_2: G_1 \rightarrow G_3$  — гомоморфизм.

5. Докажите, что ядро  $H$  гомоморфизма группы  $G_1$  на группу  $G_2$  является нормальным делителем группы  $G_1$ .

**Примечание.** Ядром гомоморфного отображения  $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$  называется полный прообраз элемента  $e_2$  — нейтрального элемента группы  $G_2$ .

6. Докажите, что если  $\varphi$  — гомоморфизм группы  $G$  на группу  $G'$ ,  $H$  — ядро этого гомоморфизма, то элементы  $g_1$  и  $g_2$  группы  $G$  лежат в одном и том же смежном классе группы  $G$  по подгруппе  $H$  тогда и только тогда, когда  $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$ .

**Примечание.** Из решения примера следует, что множество тех элементов группы  $G$ , которые отображаются при гомоморфизме  $\varphi$  на некоторый элемент  $g' \in G'$ , составляют смежный класс группы  $G$  по подгруппе  $H$  (т. е. элемент фактор-группы  $G/H$ ).

7. Аддитивная группа  $\mathbf{Z}$  гомоморфно отображена на циклическую группу  $G = \langle g \rangle = \{g^0, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$ . Какие элементы из  $\mathbf{Z}$  отображаются на элемент  $g^0$ , какие — на элемент  $g$  при этом гомоморфизме? Найдите ядро гомоморфизма и опишите фактор-группу группы  $\mathbf{Z}$ , изоморфную группе  $G$ .

8. Почему аддитивную группу  $\mathbf{Z}$  можно гомоморфно отобразить на знакопеременную группу  $A_3 = \left\{ e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ ? Установите этот гомоморфизм. Каково ядро этого гомоморфизма?

9. Аддитивную группу  $\mathbf{Z}$  гомоморфно отобразите на фактор-группу  $\mathbf{Z}/H_3$ , где  $H_3 = (3) = \{x \mid x = 3k, k \in \mathbf{Z}\}$ . Почему группа  $\mathbf{Z}/H_3$  изоморфна знакопеременной группе  $A_3$  третьей степени? Установите между ними изоморфизм.

10. Докажите, что симметрическая группа  $S_3$  третьей степени является гомоморфным образом симметрической группы  $S_4$  четвертой степени.

11. Докажите, что аддитивную группу всех функций вида  $ax + b$  ( $a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}$ ) можно гомоморфно отобразить на аддитивную группу  $\mathbf{R}$ . Каково ядро этого гомоморфизма?

12. Докажите, что аддитивную группу  $\mathbf{R}^2$  всех арифметических двумерных векторов с действительными компонентами можно гомоморфно отобразить на аддитивную группу  $\mathbf{R}$ . Единственно ли такое отображение?

13. Докажите, что отображение  $\varphi$ , заданное правилом  $x \xrightarrow{\varphi} |x| \in \mathbf{R}^+$ , является гомоморфизмом группы  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$  на  $\mathbf{R}^+$  (обе группы — мультипликативные).

14. Докажите, что если  $H_1$  и  $H_2$  — нормальные делители соответственно в группах  $G_1$  и  $G_2$ , то  $H_1 \times H_2$  — нормальный делитель в группе  $G_1 \times G_2$  и фактор-группа  $G_1 \times G_2 / H_1 \times H_2 \cong G_1 / H_1 \times G_2 / H_2$ .

15. Может ли группа иметь два изоморфных нормальных делителя, фактор-группы по которым неизоморфны?

16. Докажите, что если на плоскости дан правильный  $n$ -угольник с центром  $O$  и  $G$  — группа всех поворотов этой плоскости вокруг точки  $O$ , а  $A$  — подгруппа тех поворотов плоскости, которые переводят правильный  $n$ -угольник в себя, то  $A$  — нормальный делитель группы  $G$  и  $G/A \cong G$ .

17. Может ли группа иметь неизоморфные нормальные делители, фактор-группы по которым изоморфны?

18. Докажите, что если  $\varphi$  — гомоморфизм группы  $G_1$  на группу  $G_2$  и  $H_1$  — любая подгруппа группы  $G_1$ , то образ  $\varphi(H_1)$  подгруппы  $H_1$  при гомоморфизме  $\varphi$  является подгруппой в группе  $G_2$ . Докажите

также, что если  $H_1$  — нормальный делитель группы  $G_1$ , то  $\varphi(H_1)$  — нормальный делитель группы  $G_2$ .

19. Докажите, что при гомоморфизме  $\varphi$  группы  $G_1$  на группу  $G_2$ : а) группа  $G_1$  некоммутативна, если некоммутативна группа  $G_2$ ; б) группа  $G_1$  бесконечна, если бесконечна группа  $G_2$ ; в) элемент  $a \in G_1$  такой, что  $\varphi(a)$  имеет бесконечный порядок, является элементом, имеющим бесконечный порядок.

## § 9. КОЛЬЦА И ПОЛЯ

### Примеры

1. Докажем, что множество  $M$  матриц вида  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ , где  $a$  и  $b$  — любые действительные числа, является полем относительно матричного сложения и умножения. Найдем характеристику этого поля.

Решение. 1) Рассмотрим сумму и произведение двух матриц

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \text{ данного множества:}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что  $A + B \in M$ ,  $AB \in M$ , т. е. множество  $M$  замкнуто относительно матричного сложения и умножения.

2) Из теории матриц известно, что на множестве квадратных матриц одного и того же порядка, а значит, и на множестве  $M$ , сложение коммутативно, сложение и умножение ассоциативны и умножение дистрибутивно относительно сложения.

3) Уравнение  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$  имеет единственное решение

$$X = \begin{pmatrix} -a+c & -b+d \\ b-d & -a+c \end{pmatrix}, \text{ снова принадлежащее множеству } M.$$

$$4) BA = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix} = AB,$$

т. е. умножение в  $M$  коммутативно.

5) Рассмотрим уравнение  $AX = B$ , где  $B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  и, следовательно,  $a \neq 0$  или  $b \neq 0$ . Тогда  $|A| = a^2 + b^2 \neq 0$ , т. е. матрица  $A$  является невырожденной, а значит, она имеет обратную матрицу  $A^{-1}$ . В таком случае уравнение  $AX = B$  имеет единственное решение  $X = A^{-1}B$ . Докажем, что это решение принадлежит данному множеству  $M$ . Имеем:



$$A^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2 + b^2} & -\frac{b}{a^2 + b^2} \\ \frac{b}{a^2 + b^2} & \frac{a}{a^2 + b^2} \end{pmatrix} \in M.$$

Из того, что  $A^{-1} \in M$ ,  $B \in M$ , имеем в силу первой части доказательства  $X = A^{-1}B \in M$ . Итак, рассматриваемое уравнение в  $M$  разрешимо и имеет единственное решение. Из результатов, найденных в пунктах 1—5, следует по определению поля, что  $M$  есть поле.

Найдем характеристику поля  $M$ . Нулем поля  $M$  является матрица  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Единицей поля  $M$  является матрица  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$ . По правилу умножения числа на матрицу получим, что при любом натуральном  $n$   $n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , т. е. не существует натурального  $n$  такого, чтобы  $n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . А это значит, что характеристика поля  $M$  равна нулю.

#### Упражнения для самостоятельного решения

2. Выясните, образует ли кольцо относительно обычных сложения и умножения: а) множество  $\mathbb{N}$ ; б) множество  $\mathbb{Z}$ ; в) множество всех нечетных чисел; г) множество всех четных чисел; д) множество чисел вида  $a + b \sqrt[3]{5}$ , где  $a, b$  — любые целые числа. В каких из указанных случаев существует единичный элемент (т. е. нейтральный элемент для операции умножения)?

3. Является ли кольцом множество  $L$  чисел вида  $a + b \sqrt{3} + c \sqrt{5}$ ,  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , относительно обычных операций сложения и умножения?

4. Покажите, что множество чисел вида  $a + b \sqrt{3} + c \sqrt{5} + d \sqrt{15}$ , где  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ , является числовым кольцом, т. е. кольцом относительно обычных операций сложения и умножения над числами.

5. Докажите, что в любом кольце для любых его элементов  $a, b, c$  имеют место свойства: а) если  $a + b = a + c$ , то  $b = c$ ; б)  $a - b = a + (-b)$ ; в)  $-(a + b) = -a - b$ ; г)  $-(a - b) = b - a$ .

6. Запишите левый и правый дистрибутивные законы, если операция  $*$  дистрибутивна относительно операции  $\circ$ . Дистрибутивно ли обычное сложение относительно обычного умножения?

7. Дистрибутивна ли каждая из операций  $\cup$  и  $\cap$  относительно другой на множестве подмножеств какого-либо множества?

8. Выясните, дистрибутивна ли операция  $*$  относительно операции  $\circ$ , если  $*$  является операцией возведения в степень на множестве  $\mathbb{N}$ , а  $\circ$  — операцией умножения на том же множестве, т. е.  $a * b = a^b$ ,  $a \circ b = a \cdot b$ , где  $a, b$  — любые элементы из  $\mathbb{N}$ .

9. Справедливы ли формулы сокращенного умножения для элементов некоммутативных колец?

10. Выясните, является ли кольцом относительно матричного сложения и умножения: а) множество всех вещественных матриц одного и того же порядка  $n > 1$ ; б) множество матриц вида  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix}$  с рациональными компонентами; в) множество вещественных матриц вида  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ .

11. Докажите, что множество  $M$  матриц вида  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$  составляет коммутативное кольцо относительно матричного сложения и умножения. Выделите мультипликативную группу этого кольца. Выясните, является ли  $M$  полем ( $a$  и  $b$  — любые действительные числа).

12. Какие элементы кольца называются делителями нуля? Выясните, имеет ли кольцо  $M$  вещественных матриц вида  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$  делители нуля  $\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  этого кольца.

13. Докажите, что если  $M$  — коммутативная группа относительно операции сложения, такая, что  $ab = 0$  для любых  $a, b$  и нулевого элемента  $0$  группы  $M$ , то система  $M = \langle M; +, \cdot \rangle$  является кольцом.

14. Докажите, что если на  $\mathbb{Z}$  задана операция  $a \odot b = -ab$ , то алгебраическая система  $\langle \mathbb{Z}; +, \odot \rangle$  является коммутативным кольцом с единицей. Каков единичный элемент этого кольца?

15. Докажите, что алгебраическая система — множество  $\mathbb{Q}$  рациональных чисел с обычной операцией сложения и операцией  $\circ$ , выполняемой по правилу  $a \circ b = \frac{a \cdot b}{2}$  для любых элементов из  $\mathbb{Q}$ , — является полем. Каков единичный элемент этого поля?

16. Докажите, что если коммутативное кольцо  $K$  состоит из конечного числа  $n$  элементов, где  $n > 1$ , и не содержит делителей нуля, то оно является полем.

У к а з а н и е. Пусть  $a$  — отличный от нуля элемент из  $K$ . Покажите, что отображение  $x \rightarrow ax$  является взаимно однозначным отображением  $K$  на себя. Выведите отсюда разрешимость уравнения  $ax = b$ .

17. Докажите, что множество матриц вида  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ , где  $a$  — любое рациональное (или действительное) число, является полем относительно матричного сложения и умножения. Будет ли множество матриц данного вида составлять поле, если  $a$  — любое целое число?

18. Почему кольцо  $\{0\}$  не является полем?

19. На множестве  $M = \{a, b\}$  сложение  $\oplus$  и умножение  $\odot$  определены следующим образом:

$$a \oplus a = a, a \oplus b = b \oplus a = b, b \oplus b = a;$$

$$a \odot b = b \odot a = a, a \odot a = a, b \odot b = b.$$

Выясните, обладает ли это множество нулем и единицей и является ли система  $\langle M; \oplus, \odot \rangle$  полем относительно заданных бинарных операций.

20. На множестве  $A = \mathbb{Q}^2$  упорядоченных пар  $(a; b)$  рациональных чисел сложение  $\oplus$  и умножение  $\odot$  определены следующими правилами:

$$(a; b) \oplus (c; d) = (a + c; b + d), (a; b) \odot (c; d) = (ac; bd).$$

Покажите, что  $\langle A; \oplus, \odot \rangle$  является коммутативным кольцом с единицей и с делителями нуля.

21. Докажите, что если  $B$  — множество пар  $(a; b)$  рациональных чисел и на  $B$  две бинарные операции — сложение  $\oplus$  и умножение  $\odot$  — определены следующими условиями:

$$(a; b) \oplus (c; d) = (a + c; b + d), (a; b) \odot (c; d) = (ac + 2bd; ad + bc),$$

то система  $B = \langle B; \oplus, \odot \rangle$  является полем, а пары  $(0; 0)$  и  $(1; 0)$  соответственно нулем и единицей этого поля.

22. Докажите, что если на множестве  $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ , кроме операции сложения  $\oplus$  по модулю  $n$  (см. упр. 13 § 4), определена еще операция умножения  $\odot$  по модулю  $n$ , состоящая в том, что в качестве результата этой операции над двумя числами из  $\mathbb{Z}_n$  берется остаток от деления на  $n$  их обычного произведения, то система  $\mathbb{Z}_n = \langle \mathbb{Z}_n; \oplus, \odot \rangle$  является коммутативным кольцом.

**Примечание.** Это кольцо называется кольцом вычетов по модулю  $n$ .

23. Составьте таблицы сложения и умножения элементов колец  $\mathbb{Z}_3$  и  $\mathbb{Z}_8$ , а также выясните, имеются ли в этих кольцах делители нуля.

24. Докажите, что кольцо  $\mathbb{Z}_n$  вычетов по модулю  $n$  не является полем, если  $n$  — составное число.

25. Докажите, что всякое кольцо  $\mathbb{Z}_p$  вычетов по простому модулю  $p$  является полем.

26. Составьте таблицы сложения и умножения элементов поля  $\mathbb{Z}_7$ , а затем найдите характеристику этого поля. Какую характеристику имеет поле  $\mathbb{Z}_p$  вычетов по простому модулю  $p$ ?

27. Убедитесь в том, что поле  $A = \{0, 1\}$  с обычной операцией умножения и операцией сложения  $\oplus$ , задаваемой равенствами  $1 \oplus 1 = 0 \oplus 0 = 0$ ,  $1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1$ , имеет характеристику, равную двум.

28. Приведите примеры полей, характеристика которых равна нулю.

29. Покажите, что для составного числа  $n = n_1 n_2$ ,  $1 < n_1 < n$ ,  $1 < n_2 < n$  и единицы  $e$  любого поля справедливо равенство  $(n_1 n_2) e = (n_1 e) (n_2 e)$ .

30. Докажите, что не существует полей, характеристикой которых была бы единица или какое-либо составное натуральное число.

31. Выясните, является ли  $I$  — множество подмножеств не-которого непустого множества — кольцом относительно операций объединения  $\cup$  и пересечения  $\cap$ .

32. Докажите, что если непустое подмножество  $L$  кольца  $K$  содержит сумму и произведение двух любых своих элементов и для всякого своего элемента содержит противоположный ему элемент, то  $L$  является подкольцом кольца  $K$ .

33. Докажите, что если непустое подмножество  $L$  кольца  $K$  содержит разность и произведение любых своих элементов, то  $L$  является подкольцом кольца  $K$ .

34. Докажите, что если непустое подмножество  $L$  любого поля  $P$  содержит сумму и произведение двух любых своих элементов, а также для любого своего элемента содержит противоположный ему элемент и для любого своего ненулевого элемента содержит обратный ему элемент, то  $L$  является подполем поля  $P$ .

35. Выясните, является ли система  $\langle \mathbb{Z}; \oplus, \cdot \rangle$  кольцом относительно обычного умножения и операции сложения  $\oplus$ , выполняемой по правилу:

$$a \oplus b = \begin{cases} a + b, & \text{если } a \text{ — четное число, } b \text{ — любое целое число,} \\ a - b, & \text{если } a \text{ — нечетное число, } b \text{ — любое целое число.} \end{cases}$$

36. Охарактеризуйте все подкольца кольца  $\langle \mathbb{Z}; +, \cdot \rangle$  целых чисел.

37. Докажите, что множество  $L$  матриц вида  $\begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix}$ ,  $a, b \in \mathbb{Q}$ , является подкольцом кольца  $M$  всех вещественных матриц порядка 2.

38. В кольце  $M$  всех вещественных матриц порядка 2 укажите несколько подмножеств, которые являются его подкольцами.

39. В поле матриц вида  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ , где  $a, b \in \mathbb{R}$ , укажите такие его подмножества, которые являются подполями.

40. Докажите, что множество  $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$  чисел вида  $a + b\sqrt{5}$ , где  $a, b$  — любые целые числа, является числовым кольцом. Разрешимы ли в этом кольце уравнения  $(1 + 2\sqrt{5})x = -8 + 3\sqrt{5}$ ,  $(-8 + 3\sqrt{5})x = 1 + 2\sqrt{5}$ ,  $(3 + 2\sqrt{5})x = 2 - 3\sqrt{5}$ ? Будет ли  $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$  числовым полем?

41. Докажите, что множество  $A$  чисел вида  $2a + 2b\sqrt{3}$ , где  $a, b$  — любые целые числа, является числовым кольцом.

42. Докажите, что множество  $B = \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$  чисел вида  $a + b\sqrt{5}$ , где  $a, b$  — любые рациональные числа, является числовым полем.

43. Докажите, что множество  $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$  чисел вида  $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ , где  $a, b, c$  — любые целые числа, является числовым кольцом.

44. Какой вид имеют все подкольца кольца  $\mathbb{Z}_n = \langle \mathbb{Z}_n; \oplus, \odot \rangle$  вычетов по модулю  $n$ ? Сколько их у кольца  $\mathbb{Z}_p$  ( $p$  — простое число)?

45. Найдите в кольце  $Z_8 = \langle Z_8; \oplus, \odot \rangle$  вычетов по модулю 8 все его подкольца.

46. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2z = 1, \\ y + 2z = 2, \\ 2x + z = 1 \end{cases}$$

над полями: а)  $Z_3$ ; б)  $Z_5$ ; в)  $Z_7$ .

47. Докажите, что если элемент  $a$  кольца перестановочен с элементами  $b$  и  $c$  этого кольца, то он перестановочен и с элементами  $b + c$ ,  $bc$ .

48. Докажите, что в кольце с единицей коммутативность сложения вытекает из остальных аксиом кольца.

49. Докажите, что множество диагональных матриц порядка  $n \geq 2$ , т. е. матриц вида

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

с действительными элементами, образует относительно матричного сложения и умножения коммутативное кольцо с делителями нуля.

50. Покажите, что числа вида  $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$  с рациональными  $a, b, c$  образуют поле. Найдите в этом поле элемент, обратный числу  $\gamma = 1 - \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}$ .

51. Укажите коммутативное кольцо с единицей, содержащее такой элемент  $a$ , который отличен от нуля этого кольца и квадрат которого равен нулю этого кольца.

52. Докажите, что в поле  $M = \langle M; +, \cdot \rangle$ , где  $M$  — множество всех матриц вида  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  с действительными  $a$  и  $b$ ,  $+$ ,  $\cdot$  являются операциями над матрицами, существует элемент  $X$ , такой, что  $X^2 = -E$  ( $E$  — единица поля  $M$ ).

53. Покажите, что множество всех вещественных функций, непрерывных на заданном отрезке  $[a; b]$ , образует кольцо относительно обычных операций сложения и умножения функций. Приведите примеры делителей нуля в кольце функций, непрерывных на отрезке  $[-1; 1]$ .

54. Покажите, что в числовом кольце  $Z[\sqrt[3]{2}]$  (см. упр. 43 § 9) уравнение  $(1 - 3\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{4})v = -18 + 10\sqrt[3]{2} + 20\sqrt[3]{4}$  не имеет решения.

55. а) Докажите, что кольцо чисел вида  $a + b\sqrt[5]{5}$  изоморфно кольцу матриц вида  $\begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix}$  (см. упр. 37 § 9; в обоих кольцах  $a$  и  $b$  — любые рациональные числа). б) Почему второе кольцо будет являться полем?

56. Покажите, что кольцо  $\mathbf{Z}$  можно изоморфно отобразить на кольцо  $M$  матриц вида  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ , где  $a$  — любое целое число, а поле  $\mathbf{R}$  — на поле матриц вида  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ , где  $a \in \mathbf{R}$ .

57. Докажите, что кольцо целых чисел можно гомоморфно отобразить на кольцо вычетов по модулю 2.

58. Докажите, что кольцо целых чисел можно гомоморфно отобразить на кольцо  $\mathbf{Z}_n$  вычетов по любому модулю  $n$  ( $n$  — натуральное число).

59. Почему кольцо всех целых чисел нельзя ни изоморфно, ни гомоморфно отобразить на любое подкольцо, отличное от  $\{0\}$  и самого кольца?

60. Можно ли некоторое кольцо, не являющееся полем, гомоморфно отобразить на некоторое поле?

61. Можно ли некоторое кольцо с единицей гомоморфно отобразить на некоторое кольцо без единицы? Можно ли кольцо без единицы гомоморфно отобразить на кольцо с единицей?

62. Докажите, что изоморфны:

а) кольцо матриц вида  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$  и кольцо  $\mathbf{Q}^2$  упорядоченных пар  $(a; b)$  из упр. 20;

б) поле матриц вида  $\begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a \end{pmatrix}$  и поле упорядоченных пар  $(a; b)$ , в котором сложение  $\oplus$  и умножение  $\odot$  определены по следующим правилам:

$$\begin{aligned} (a; b) \oplus (c; d) &= (a + c; b + d), \\ (a; b) \odot (c; d) &= (ac + 5bd; ad + bc), \end{aligned}$$

где  $a, b$  — любые рациональные числа,

63. Покажите, что отображение  $a + b \sqrt[3]{7} + c \sqrt[3]{49} \rightarrow a + b \sqrt[3]{49} + c \sqrt[3]{7}$ , где  $a, b \in \mathbf{Z}$ , является изоморфным отображением кольца  $\mathbf{Z}[\sqrt[3]{7}]$  на себя.

**Примечание.** Изоморфное отображение кольца на себя называется *автоморфизмом* этого кольца.

64. Покажите, что любое поле из двух элементов изоморфно полю  $\mathbf{Z}_2$ .

65. Какие из приведенных ниже алгебраических систем являются линейно упорядоченными множествами:

а)  $\langle \mathbf{N}, < \rangle$ ;

б)  $\langle \mathbf{Z}, > \rangle$ ;

в)  $\langle \mathbf{Z}, \cdot \rangle$ ;

г)  $\langle P(M), \subset \rangle$ , где  $P(M)$  — множество подмножеств некоторого заданного множества  $M$ ?

66. Докажите следующие свойства упорядоченных полей:

а) если  $a < b$  и  $c \leq d$ , то  $a + c < b + d$ ;

б) если  $a < 0$ , то  $a^{-1} < 0$ ; если  $a > 0$ , то  $a^{-1} > 0$ ;

в) если  $0 < a < b$ , то  $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ ;

г)  $a^2 \geq 0$ ;

д) если  $0 < a < b$  и  $0 < c \leq d$ , то  $ac < bd$ ;

е) если  $a < b < 0$ , то  $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$ ;

ж) если  $|a| < b$ , то  $-b < a < b$ ;

з) если  $-b < a < b$ , то  $|a| < b$ ;

и)  $|ab| = |a| \cdot |b|$ ;

к)  $|a + b| \leq |a| + |b|$ ;

л)  $|a - b| \geq |a| - |b|$ .

67. Докажите, что в упорядоченном поле справедливы следующие неравенства:

а)  $a^2 + b^2 + c^2 + 4 > 2(a + b + c)$ ;

б)  $(ab + bc + ac)^2 \geq 3abc(a + b + c)$ ;

в)  $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$ ;

г)  $a^4 + 6a^2b^2 + b^4 \geq 4a^3b + 4ab^3$ ;

д)  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ ;

е)  $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + ac + bc)$ .

68. Докажите, что в упорядоченном поле справедливы следующие неравенства:

а)  $2a^3 + 2a^2 + 1 > a$  при  $a \geq 0$ ;

б)  $a^6 + b^6 \geq a^5b + ab^5$  при  $a \geq 0, b \geq 0$ ;

в)  $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$  при  $a > 0, b > 0, c > 0$ ;

г)  $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$  при  $a > 0, b > 0, c > 0$ ;

д)  $a^5 + b^5 - a^4b - ab^4 \geq 0$  при  $a > 0, b > 0$ ;

е)  $ab + ac + bc \leq 0$  при  $a + b + c = 0$ .

69. Докажите, что характеристика всякого упорядоченного поля равна нулю.

## § 10. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

### Примеры

#### 1. Решим уравнение

$$(2 - i)x + (5 + 6i)y = 1 - 3i,$$

считая неизвестные  $x$  и  $y$  действительными числами.

Решение. Приводя левую часть к виду  $a + bi$ , где  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , получим уравнение

$$(2x + 5y) + (-x + 6y)i = 1 - 3i,$$

равносильное данному. Так как равенство комплексных чисел  $a + bi$  и  $a' + b'i$  означает  $a = a'$  и  $b = b'$ , то имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 5y = 1, \\ -x + 6y = -3. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим  $x = \frac{21}{17}$ ,  $y = -\frac{5}{17}$ .

#### 2. Вычислим:

$$i^{36}, i^{125}, i^{239}.$$

**Р е ш е н и е.** Непосредственно находим:

$$i^0 = 1; i^1 = i; i^2 = -1; i^3 = -i; i^4 = 1.$$

Из последнего равенства следует  $i^{4n} = 1$ , где  $n$  — любое целое число. Таким образом, имеем:

$$i^{4n} = 1; i^{4n+1} = i; i^{4n+2} = -1; i^{4n+3} = -i.$$

Число 36 есть  $4n$  (где  $n = 9$ ), значит,  $i^{36} = 1$ . Число 125 есть  $4n + 1$  (где  $n = 31$ ), значит,  $i^{125} = i$ . Наконец, 239 есть  $4n + 3$  (где  $n = 59$ ), значит,  $i^{239} = -i$ .

3. Найдем число  $\frac{2+i}{1-2i}$ .

**Р е ш е н и е.** Напомним общее правило деления комплексных чисел. Пусть требуется найти  $\frac{\alpha}{\beta}$ , где  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\beta \in \mathbb{C}$ ,  $\beta \neq 0$ . Это означает, что мы должны найти решение уравнения

$$\beta \xi = \alpha, \quad (1)$$

где  $\xi$  — неизвестное комплексное число.

Умножив обе части (1) на число  $\bar{\beta}$  (сопряженное  $\beta$ ), получим уравнение  $(\bar{\beta}\beta) \cdot \xi = \bar{\beta}\alpha$ , откуда следует

$$\xi = \frac{\bar{\beta}\alpha}{\bar{\beta}\beta}.$$

Правую часть вычислить легко, поскольку  $\bar{\beta}\beta$  есть действительное число  $|\beta|^2$ .

В нашем примере имеем:

$$\frac{2+i}{1-2i} = \frac{(1+2i)(2+i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{(1+2i)(2+i)}{5} = \frac{1}{5}(-1+5i) = -\frac{1}{5} + i.$$

4. Найдем в поле  $\mathbb{C}$  все значения  $\sqrt{-3-4i}$ .

**Р е ш е н и е.** Мы должны найти корни уравнения

$$(x+yi)^2 = -3-4i \quad (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$$

или

$$(x^2 - y^2) + 2xyi = -3 - 4i.$$

Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3, \\ 2xy = -4 \end{cases}$$

над полем  $\mathbb{R}$ . Возводя каждое из написанных уравнений в квадрат и складывая, получим:

$$(x^2 + y^2)^2 = 25,$$

откуда следует  $x^2 + y^2 = 5$ . Из этого уравнения и первого уравнения нашей системы находим:



$$x^2 = 1; y^2 = 4,$$

откуда следует  $x = \pm 1, y = \pm 4$ . При таких значениях  $x$  и  $y$  первое из уравнений системы будет выполняться, из второго же уравнения находим окончательно два решения:

$$x = 1, y = -4 \text{ и } x = -1, y = 4.$$

Итак, найдены два искомых значения  $\sqrt{-3-4i}$ :

$$1-4i \text{ и } -(1-4i).$$

#### Упражнения для самостоятельного решения

5. Произведите действия над комплексными числами:

а)  $(1+i)(2+i) + \frac{5}{1+2i}$ ;

б)  $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} - (1-i)^{12}$ ;

в)  $\frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}$ ;

г)  $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$  ( $n$  — целое положительное число).

У к а з а н и е. г) Представьте  $(1+i)^n$  как  $(1+i)^{n-2}(1+i)^2$  и вычислите отдельно  $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{n-2}$ .

6. Найдите значение функции

$$f(x) = x^4 + \frac{2+i}{x} - (-3+2i)$$

при  $x = 1-2i$ .

7. Решите уравнения, считая неизвестные  $x$  и  $y$  действительными числами:

а)  $(1+2i)x + (3-5i)y = 1-3i$ ;

б)  $\frac{6x-iy}{5+2i} = \frac{15}{8x+3yi}$ ;

в)  $2+5ix = 14i+3x-5y$ .

8. Вычислите:

$$i^{17} - 5i^{14} + 10i^7 + 9i^5 - 4.$$

9. Найдите значение квадратного корня:

а)  $\sqrt{8+6i}$ ; б)  $\sqrt{3-4i}$ ; в)  $\sqrt{-15+3i\sqrt{11}}$ .

10. Решите уравнения с неизвестным  $\xi \in \mathbb{C}$ :

а)  $\xi^2 + (5-2i)\xi + 5(1-i) = 0$ ;

б)  $\xi^2 + (1-2i)\xi - 2i = 0$ ;

в)  $(2+i)\xi^2 - (5-i)\xi + (2-2i) = 0$ .

11. Докажите, что в поле  $\mathbf{C}$  разрешимо любое квадратное уравнение  $\alpha\xi^2 + \beta\xi + \gamma = 0$ , где  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}$ ,  $\alpha \neq 0$ .

12. Докажите, что для любых  $\alpha \in \mathbf{C}$ ,  $\beta \in \mathbf{C}$  справедливы равенства

$$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \quad \overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}.$$

13. Докажите справедливость равенств

$$\overline{\alpha - \beta} = \bar{\alpha} - \bar{\beta}, \quad \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \quad (\beta \neq 0).$$

14. Почему отображение  $f(\alpha) = \bar{\alpha}$  поля  $\mathbf{C}$  на себя является изоморфным (т. е. автоизоморфизмом поля  $\mathbf{C}$ )?

15. Найдите все комплексные числа, каждое из которых сопряжено со своим квадратом.

16. Докажите, что множество  $\mathbf{Z}[i]$  всех «целых гауссовых чисел», т. е. чисел вида  $a + bi$ , где  $a, b \in \mathbf{Z}$ , является подкольцом кольца  $\mathbf{C}$ .

17. Докажите, что множество  $\mathbf{Q}[i]$  всех «гауссовых чисел», т. е. чисел вида  $a + bi$ , где  $a, b \in \mathbf{Q}$ , является подполем поля  $\mathbf{C}$ .

18. Выясните, образуют ли числа вида  $a + bi\sqrt{5}$ , где  $a$  и  $b$  — любые рациональные числа, числовое поле.

19. Покажите, что поле  $\mathbf{C}$  изоморфно полю, состоящему из матриц вида  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ , где  $a, b \in \mathbf{R}$ .

## ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРНОГО (ЛИНЕЙНОГО) ПРОСТРАНСТВА,  
ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ

## 1. Определение векторного пространства

## Примеры

1. Выясним, являются ли линейными пространствами: а) множество  $\mathbf{Z}$  над полем  $\mathbf{R}$ , б) поле  $\mathbf{C}$  над полем  $\mathbf{R}$ ; в) поле  $\mathbf{R}$  над полем  $\mathbf{C}$ .

**Решение.** а) Множество  $\mathbf{Z}$  есть коммутативная группа по сложению, но при умножении целого числа  $k$  на действительное число  $\lambda$  мы не всегда получим элемент из  $\mathbf{Z}$  (например, при  $k = 1$  и  $\lambda = \frac{1}{2}$ ), т. е.  $\mathbf{Z}$  не замкнуто относительно операции умножения на числа поля  $\mathbf{R}$ . Поэтому  $\mathbf{Z}$  не является линейным пространством над полем  $\mathbf{R}$  (как и над всяким другим числовым полем, которое всегда содержит рациональное число  $\frac{1}{2}$ ).

б) Поле  $\mathbf{C}$  (как и всякое другое поле) является коммутативной группой по сложению. Для всякого  $\lambda \in \mathbf{R}$  и  $a + bi \in \mathbf{C}$  имеем  $\lambda(a + bi) = \lambda a + (\lambda b)i \in \mathbf{C}$ . Следовательно, множество  $\mathbf{C}$  замкнуто относительно умножения на числа поля  $\mathbf{R}$ . Легко также проверить, что в множестве  $\mathbf{C}$  выполняются остальные требования 2—5, предъявляемые к линейному пространству (см. «Алгебра», с. 73). Значит,  $\mathbf{C}$  является линейным пространством над  $\mathbf{R}$ .

в) Так как произведение действительного числа  $a$  на число  $\lambda = c + di$  из поля  $\mathbf{C}$  при  $d \neq 0$  не дает снова действительного числа, то  $\mathbf{R}$  не замкнуто относительно операции умножения на число из поля  $\mathbf{C}$  и, следовательно, не является линейным пространством над  $\mathbf{C}$ .

2. Покажем, что множество  $M$  всех квадратных матриц любого фиксированного порядка  $n$  с комплексными элементами есть линейное пространство над полем  $\mathbf{R}$ .

**Решение.** Известно, что  $M$  является группой относительно матричного сложения. В  $M$  определена операция умножения на число  $\lambda$  любого числового поля; так, при  $n = 2$  если  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , то  $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$ ; поэтому если  $A$  есть квадратная матрица с комплексными элементами и  $\lambda \in \mathbf{R}$ , то и  $\lambda A$  есть квадратная матрица с комплексными элементами. Известно также из теории квадратных матриц, что операция умножения квадратных матриц на число удовлетворяет условиям 2—5, предъявляемым к линейному пространству. Поэтому  $M$  есть линейное пространство

над полем  $\mathbf{R}$ . Нулевым вектором в  $M$  является квадратная матрица, все элементы которой нули.

3. Выясним, является ли линейным пространством над полем  $\mathbf{R}$ : а) множество  $F_0$  многочленов степени  $n$  с комплексными коэффициентами; б) множество  $F$  многочленов степени  $\leq n$  с комплексными коэффициентами.

Решение. а) Множество  $F_0$  не является линейным пространством над  $\mathbf{R}$  потому, что сумма двух многочленов степени  $n$  не всегда дает многочлен также степени  $n$ . Так, при  $n = 3$  сумма многочленов

$$f_1(x) = 2x^3 + x^2 - 2x + 5, \quad f_2(x) = -2x^3 - x^2 + x + 3$$

есть многочлен  $f(x) = -x + 8$  первой, а не третьей степени.

б) Известно, что множество  $F$  многочленов степени  $\leq n$  с комплексными коэффициентами есть коммутативная группа по сложению. Нулевым элементом ее является нуль-многочлен  $0 = 0 \cdot x^n + \dots + 0 \cdot x + 0$ . Произведение любого многочлена из  $F$  на число из  $\mathbf{R}$  дает снова многочлен из множества  $F$ , так как для любого многочлена  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  из  $F$  и  $\lambda \in \mathbf{R}$  имеем:

$$\lambda f(x) = (\lambda a_n) x^n + \dots + (\lambda a_1) x + \lambda a_0.$$

Отсюда видно, что  $\lambda f(x)$  есть снова многочлен с комплексными коэффициентами. Легко также проверить, что требования 2 — 5, предъявляемые к линейным пространствам, в множестве  $F$  выполняются. Значит,  $F$  есть линейное пространство над  $\mathbf{R}$ .

#### Упражнения для самостоятельного решения

4. Покажите, что множество  $V_2$  векторов плоскости, исходящих из начала координат, является вещественным линейным пространством (т. е. пространством над полем  $\mathbf{R}$ ).

5. Выясните, является ли линейным пространством над полем  $\mathbf{R}$ :

а) множество векторов плоскости, исходящих из начала координат, концы которых лежат на прямой  $y = 2x + 3$  (или вообще на прямой  $y = kx + l$ , где  $l \neq 0$ );

б) множество векторов плоскости, исходящих из начала координат, концы которых лежат в первой четверти системы координат;

в) множество тех  $n$ -мерных арифметических векторов  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , у которых  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0$ ;

г) множество тех  $n$ -мерных арифметических векторов, компоненты которых есть целые числа.

6. Почему множество невырожденных матриц 2-го порядка с элементами из  $\mathbf{R}$  не является вещественным линейным пространством относительно операций сложения матриц и умножения матрицы на число?

7. Выясните, является ли линейным пространством над полем  $\mathbf{R}$  множество  $\mathbf{R}^+$ , если операция сложения  $\oplus$  элементов из  $\mathbf{R}^+$

есть обычное умножение,  $a \oplus b = a \cdot b$ , а умножение  $\odot$  числа  $k$  из поля  $\mathbf{R}$  на элемент  $a \in \mathbf{R}^+$  есть возведение элемента  $a$  в степень  $k$ :

$$k \odot a = a^k.$$

8. Над полем  $P$  задано линейное пространство  $P^2$  строк  $(a_1, a_2)$ , где  $a_1, a_2 \in P$ , с обычным сложением строк и обычным умножением строки на элемент  $k \in P$  (см. «Алгебра», с. 74, пример 2).

Выясните, сколько векторов будет иметь это пространство, если за  $P$  взять поле  $\mathbf{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$  вычетов по модулю 3; перечислите эти векторы. Из скольких векторов состоит линейное пространство  $\mathbf{Z}_3^n$ ?

9. Покажите, что множество  $\mathbf{R}$  с обычной операцией сложения и обычной операцией умножения на рациональные числа является линейным пространством над полем  $\mathbf{Q}$ .

10. На множестве  $F$  всех функций, заданных на отрезке  $[a, b] \subset \mathbf{R}$  и принимающих положительные действительные значения, сложение функций и умножение функций на действительное число определяются равенствами

$$f \oplus g = f \cdot g, \quad \lambda \odot f = f^\lambda, \quad f, g \in F, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Покажите, что система  $\langle F; \oplus, \odot \rangle$  является линейным пространством над полем  $\mathbf{R}$ .

11. Пользуясь свойствами линейного пространства, подсчитайте:

- а)  $0 \cdot a + 2 \cdot 0 + 0 \cdot b - 3 \cdot 0$ ;
- б)  $2a + 0 \cdot a + 3 \cdot 0 + a$ ;
- в)  $3(a - b) + (2 - 5)a + 3b$ ,

если  $a, b$  — любые векторы одного и того же линейного пространства  $L$ ,  $0$  — нулевой вектор.

12. Найдите линейную комбинацию  $3a_1 - 2a_2 + 8a_3$  векторов  $a_1, a_2, a_3$ , если:

- а)  $a_1 = (1, 2, 1, 2), a_2 = (-1, -3, 4, 5),$   
 $a_3 = (-5, 0, 2, 3)$ ;
- б)  $a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ;
- в)  $a_1 = 1 + 2x + x^2 + 2x^3, a_2 = -1 - 3x + 4x^2 + 5x^3,$   
 $a_3 = -5 + 2x^2 + 3x^3$ .

13. Решите векторное уравнение  $2a_1 + 3a_2 - a_3 - 7x = a_4$ , если:

- а)  $a_1 = (-1, 2, -3, 4), a_2 = (-1, -1, -1, 5),$   
 $a_3 = (2, -5, -1, 3), a_4 = (2, 1, -2, -1)$ ;
- б)  $a_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ .

14. Решите уравнение  $3(a_1 - 2x) + 5(a_1 + a_3 - 3x) = 2(a_3 - 4x)$ , если:

- а)  $a_1 = (4, 3), a_2 = (2, -1), a_3 = (-1, 4)$ ;
- б)  $a_1 = 4 + 3i, a_2 = 2 - i, a_3 = -1 + 4i$ .

## 2. Линейная зависимость векторов

### Примеры

15. Покажем, что система векторов  $\mathbf{a}_1 = (5, 4, 3)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (3, 3, 2)$ ,  $\mathbf{a}_3 = (8, 1, 3)$  арифметического пространства  $\mathbf{R}^3$  линейно зависима. Какие линейные зависимости имеют место между данными векторами?

Решение. Составляем и решаем уравнение

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}. \quad (1)$$

Получаем  $(5\lambda_1 + 3\lambda_2 + 8\lambda_3, 4\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3, 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3) = (0, 0, 0)$ , т. е.

$$\begin{cases} 5\lambda_1 + 3\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0, \\ 4\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Приводим матрицу системы (2) к лестничному виду:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & -27 \\ 0 & 2 & -18 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -9 \end{pmatrix}.$$

Система (2), следовательно, равносильна системе

$$\begin{cases} \lambda_1 + 7\lambda_3 = 0, \\ \lambda_2 - 9\lambda_3 = 0, \end{cases} \quad (2')$$

допускающей, очевидно, ненулевые решения. Поэтому уравнение (1) выполняется при некоторых  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , не равных одновременно 0, т. е. система векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  линейно зависима.

Решая систему (2'), находим:

$$\lambda_1 = -7\lambda_3, \lambda_2 = 9\lambda_3;$$

значит, всякая линейная зависимость между данными векторами может быть представлена в виде

$$-7\lambda_3 \mathbf{a}_1 + 9\lambda_3 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{0},$$

где  $\lambda_3$  — подходящее действительное число.

16. Выясним, является ли линейно зависимой следующая система векторов пространства многочленов степени  $\leq 2$  над полем  $\mathbf{R}$ :

$$\begin{cases} f_1(x) = 3 + x + 2x^2, \\ f_2(x) = -2 + x - x^2. \end{cases}$$

Решение. Составляем и решаем уравнение

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = 0. \quad (3)$$

В данном случае вектор  $\mathbf{0}$  есть многочлен  $0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$ , т. е. уравнение (3) имеет вид:

$$\lambda_1 (3 + x + 2x^2) + \lambda_2 (-2 + x - x^2) = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2,$$

или

$$(3\lambda_1 - 2\lambda_2) + (\lambda_1 + \lambda_2)x + (2\lambda_1 - \lambda_2)x^2 = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2.$$

Поскольку равенство многочленов означает равенство их коэффициентов при одинаковых степенях  $x$ , мы получаем систему

$$\begin{cases} 3\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Преобразуем матрицу этой системы к лестничному виду:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, система (4) равносильна системе

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ -5\lambda_2 = 0, \end{cases}$$

имеющей единственное решение  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$ . Таким образом, равенство (3) возможно лишь при  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , т. е. наша система линейно независима.

17. Докажем, что в вещественном пространстве квадратных матриц 2-го порядка первый из трех векторов

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

не выражается линейно через остальные.

**Решение.** Допустим противное. Тогда найдутся такие числа  $k_1$  и  $k_2$ , что

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

По определению равенства матриц и умножения матрицы на число получаем следующую систему уравнений относительно  $k_1$  и  $k_2$ :

$$\begin{cases} 2k_1 - 2k_2 = 1, \\ 3k_1 + 3k_2 = 0, \\ k_1 + 2k_2 = 0, \\ k_2 = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Решая систему (6) методом Гаусса, легко убеждаемся в ее противоречивости. Значит, вопреки предположению, чисел  $k_1$  и  $k_2$ , удовлетворяющих условию (5), не существует.

#### Упражнения для самостоятельного решения

18. Используя простейшие свойства линейной зависимости, выясните, какие из следующих систем векторов (в соответствующих пространствах над полем  $\mathbf{R}$ ) являются линейно зависимыми:

- а)  $\alpha_1 = (2, 3, 5)$ ,  $\alpha_2 = (-2, -3, -5)$ ;
- б)  $\alpha_1 = (2, 3, 5)$ ,  $\alpha_2 = (-2, -3, -6)$ ;
- в)  $\alpha_1 = (2, 3, 5)$ ,  $\alpha_2 = (2, 3, 5)$ ,  $\alpha_3 = (-2, -3, -6)$ ;

$$\text{г) } \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{д) } \mathbf{a}_1 = i, \mathbf{a}_2 = 3i;$$

$$\text{е) } \mathbf{a}_1 = 0, \mathbf{a}_2 = 2 + 3i.$$

19. Убедитесь в том, что следующие системы векторов (в соответствующих пространствах над  $\mathbf{R}$ ) линейно зависимы, выразите один из векторов каждой системы через остальные:

$$\text{а) } \mathbf{a}_1 = \frac{1}{2}, \mathbf{a}_2 = 3i, \mathbf{a}_3 = -4 - 6i;$$

$$\text{б) } \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } f_1(x) = 1, f_2(x) = 3x, f_3(x) = \frac{1}{2}x^2, f_4(x) = 2 + x + x^2.$$

20. Покажите, что следующие системы векторов (в соответствующих пространствах над  $\mathbf{R}$ ) линейно независимы:

$$\text{а) } \mathbf{a}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{a}_2 = (1, 2, 3), \mathbf{a}_3 = (1, 3, 3);$$

$$\text{б) } \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \mathbf{z}_1 = 1 + 2i, \mathbf{z}_2 = 2 + i;$$

$$\text{г) } f_1(x) = 1 + x + x^2 + x^3, f_2(x) = 1 - x + x^2 - x^3, \\ f_3(x) = 2 + 3x + x^2 + 4x^3.$$

21. Покажите, что в вещественном пространстве многочленов степени  $\leq 2$  вектор  $f(x) = 1 + 4x - 7x^2$  линейно выражается через векторы  $f_1(x) = 2 - x + x^2$  и  $f_2(x) = 1 - 2x + 3x^2$ . Представьте  $f(x)$  в виде линейной комбинации  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ .

22. Покажите, что вектор  $2 - 7i$  из вещественного пространства  $\mathbf{C}$  линейно выражается через векторы  $2 - 3i$ ,  $4 + 2i$  (представьте его в виде линейной комбинации двух последних векторов).

23. Докажите, что если система векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  линейно независима, то система  $\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{c} + \mathbf{a}$  также линейно независима.

У к а з а н и е. Примените метод от противного.

24. Докажите, что если система  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  линейно независима и  $\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_m \mathbf{a}_m$ , то указанное линейное представление вектора  $\mathbf{b}$  через векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$  единственно.

У к а з а н и е. Покажите, что если также  $\mathbf{b} = \lambda'_1 \mathbf{a}_1 + \lambda'_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda'_m \mathbf{a}_m$ , то  $\lambda_1 = \lambda'_1, \lambda_2 = \lambda'_2, \dots, \lambda_m = \lambda'_m$ .

25. Докажите, что в пространстве многочленов степени  $\leq 2$  система векторов  $f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2, f_4(x) = 1 + x + x^2$  линейно зависима, а любые три вектора этой системы образуют линейно независимую подсистему.

26. Покажите, что векторы  $\mathbf{a} = (\alpha, \beta), \mathbf{b} = (\gamma, \delta)$  линейного пространства  $P^2$  над полем  $P$  линейно зависимы тогда и только тогда, когда  $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ , где  $0$  — нуль поля  $P$ .

27. Покажите, что  $\mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{a} = \mathbf{0}$  для любого вектора  $\mathbf{a}$  пространства  $\mathbf{Z}_3^n$  над полем  $\mathbf{Z}_3$  вычетов по модулю 3.

28. Докажите, что если  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s$  и  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_s (s > 1)$  — две системы векторов некоторого пространства над  $\mathbf{R}$ , такие, что



$$\begin{aligned}b_1 &= a_1, \\b_2 &= a_2 - \lambda_2 a_1, \\&\vdots \\b_s &= a_s - \lambda_s a_1,\end{aligned}$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  — определенные числа из  $\mathbb{R}$ , то система  $a_1, a_2, \dots, a_s$  линейно зависима тогда и только тогда, когда линейно зависима система  $b_1, b_2, \dots, b_s$ .

## § 2. КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

### 1. Базис и размерность линейного пространства

#### Примеры

1. Покажем, что в линейном вещественном пространстве  $F$  многочленов степени  $\leq n$  система векторов  $1, x, x^2, \dots, x^n$  составляет базис, и найдем размерность этого пространства.

**Решение.** Данная система векторов линейно независима. Действительно, равенство

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_n x^n = 0,$$

т. е. равенство

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_n x^n = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^n$$

справедливо при любых значениях  $x$  лишь тогда, когда коэффициенты при соответствующих степенях  $x$  двух многочленов равны, иначе говоря, лишь при  $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ .

Кроме того, любой элемент  $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m$  из  $F$ ,  $m \leq n$ , линейно выражается через векторы  $1, x, x^2, \dots, x^n$ :

$$f(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_m \cdot x^m + 0 \cdot x^{m+1} + \dots + 0 \cdot x^n.$$

На основании определения базиса полученные результаты позволяют сделать вывод, что система векторов  $1, x, x^2, \dots, x^n$  является базисом пространства  $F$ . А так как этот базис состоит из  $n + 1$  векторов, то размерность пространства  $F$  равна  $n + 1$ :  $\dim F = n + 1$ .

Можно доказать, что система векторов  $1, (x - a), (x - a)^2, \dots, (x - a)^n$ , где  $a \in \mathbb{R}$ , также является базисом пространства  $F$ .

2. Покажем, что каждая из нижеприведенных систем векторов:

$$\begin{aligned}\text{а) } e_1 &= (1, 2, 1), & \text{б) } e'_1 &= (3, 1, 4), \\e_2 &= (2, 3, 3), & e'_2 &= (5, 2, 1), \\e_3 &= (3, 7, 1); & e'_3 &= (1, 1, -6)\end{aligned}$$

является базисом пространства  $\mathbb{R}^3$ .

**Решение.** Каждая из данных систем состоит из 3 векторов. Но и  $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ . Поэтому достаточно показать, что системы линейно независимы

Составим матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Поскольку определители  $|A| = 1$ ,  $|A'| = 4$  отличны от нуля, то строки каждой матрицы линейно независимы. А это и означает, что и обе системы векторов линейно независимы.

3. Выясним, является ли система векторов  $f_1(x) = x^2 + 3x^3$ ,  $f_2(x) = 3 + x + 8x^3$  пространства  $F$  многочленов степени  $\leq 3$  (над  $\mathbf{R}$ ) линейно независимой системой, и если является, то дополним ее до базиса пространства  $F$ .

**Решение.** Заметим сначала, что если  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — базис  $n$ -мерного пространства, а  $b_1, b_2, \dots, b_m$  ( $m < n$ ) — линейно независимая система векторов этого пространства, то в базисе найдется такой вектор  $a_k$ , что система  $b_1, \dots, b_m, a_k$  также будет линейно независимой. Действительно, в качестве вектора  $a_k$  можно взять любой вектор базиса, который не выражается через векторы  $b_1, \dots, b_m$ . Такой вектор найдется (в силу теоремы о двух системах векторов, см. «Алгебра», с. 78), и система  $b_1, \dots, b_m, a_k$  будет линейно независимой (почему?). Отсюда следует, что систему  $b_1, \dots, b_m$  можно дополнить за счет векторов любого базиса до линейно независимой системы из  $n$  векторов, т. е. до некоторого базиса пространства. С другой стороны, если какую-либо систему можно дополнить до базиса, то она, очевидно, линейно независима.

В нашем случае имеем систему  $b_1 = x^2 + 3x^3$ ,  $b_2 = 3 + x + 8x^3$ , а система  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = x$ ,  $a_3 = x^2$ ,  $a_4 = x^3$  является базисом пространства  $F$ . Проверим, нет ли в этом базисе двух векторов, составляющих вместе с  $b_1$  и  $b_2$  линейно независимую систему. Рассмотрим, например, векторы  $a_1$  и  $a_2$ . Если бы система  $b_1, b_2, a_1, a_2$  была линейно зависимой, то мы имели бы

$$\lambda_1(x^2 + 3x^3) + \lambda_2(3 + x + 8x^3) + \lambda_3 \cdot 1 + \lambda_4 \cdot x = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3, \quad (1)$$

где не все  $\lambda_i$  равны 0. Уравнение (1) равносильно следующей системе однородных уравнений:

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + 8\lambda_2 & = 0, \\ \lambda_1 & = 0, \\ \lambda_2 + \lambda_4 & = 0, \\ 3\lambda_2 + \lambda_3 & = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Поскольку определитель системы (2), как легко проверить, отличен от 0, то система допускает только нулевое решение  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ . Значит, система  $b_1, b_2, a_1, a_2$  линейно независима и является базисом пространства  $F$ . Отсюда, очевидно, следует, что векторы  $b_1, b_2$  — линейно независимы.

4. При каких значениях параметра  $\lambda$  система векторов  $(0, 1, \lambda)$ ,  $(\lambda, 0, 1)$ ,  $(\lambda, 1, \lambda)$  является базисом пространства  $\mathbf{R}^3$ ?

**Решение.** Данная система состоит из 3 векторов. Но и  $\dim \mathbf{R}^3 = 3$ . Следовательно, для того чтобы данная система векторов

составляла в  $\mathbf{R}^3$  базис, достаточно, чтобы она была линейно независимой, а для этого достаточно, чтобы ее ранг, или ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ \lambda & 0 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

был равен 3, т. е.  $|A| \neq 0$ . А так как  $|A| = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$ , то данная система будет базисом при любых значениях  $\lambda$ , кроме нуля.

### Упражнения для самостоятельного решения

5. Найдите все базисы следующих систем векторов:

а)  $a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $a_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $a_3 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ ;

б)  $b_1 = \frac{1}{2}$ ,  $b_2 = 3i$ ,  $b_3 = -4 - 6i$ ;

в)  $c_1 = -1 + 2i$ ,  $c_2 = 1 - 2i$ ,  $c_3 = \frac{1}{2} - i$ ;

г)  $f_1 = 2$ ,  $f_2 = x - 2x^2$ ,  $f_3 = -2x + 4x^2$ .

6. Покажите, что в пространстве многочленов степени  $\leq 2$  (над  $\mathbf{R}$ ) система векторов  $f_1 = 2 + 3x - x^2$ ,  $f_2 = -1 + 2x + x^2$ ,  $f_3 = 1$  является базисом.

7. Покажите, что система векторов  $a_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $a_2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  линейного пространства  $M_2$  квадратных матриц 2-го порядка (над  $\mathbf{R}$ ) является линейно независимой. Дополните ее до базиса этого пространства.

8. Линейно независимую систему векторов  $f_1 = 3 + x + 2x^2$ ,  $f_2 = -2 + x - x^2$  (см. упр. 16 § 1) вещественного пространства многочленов степени  $\leq 2$  дополните до базиса этого пространства.

9. В пространстве  $\mathbf{R}^4$  систему векторов  $a_1 = (1, 2, 3, 4)$ ,  $a_2 = (4, 1, 2, 3)$  дополните до базиса этого пространства.

10. При каких значениях параметра  $\lambda$  система векторов  $(1, 2, -1, 1)$ ,  $(5, 1, 2, 1)$ ,  $(4, -1, \lambda, 0)$ ,  $(3, \lambda, 4, -1)$  является базисом пространства  $\mathbf{R}^4$ ?

11. Дополните вектор  $2 + 3i$  до базиса линейного пространства  $\mathbf{C}$  над полем  $\mathbf{R}$ .

12. Покажите, что система векторов  $a_1 = (1, 1, 0)$ ,  $a_2 = (0, 1, 1)$ ,  $a_3 = (1, 0, 2)$  составляет базис арифметического линейного пространства  $\mathbf{R}^3$ , и линейно выразите вектор  $b = (2, -3, 5)$  через этот базис.

13. Найдите все базисы и размерность линейного пространства  $M_1$  матриц вида  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$  с элементами поля  $\mathbf{Z}_2$  вычетов по модулю 2.

14. Покажите, что при любых значениях  $\alpha, \beta, \gamma$  система векторов  $(1, \alpha, \beta)$ ,  $(0, 1, \gamma)$ ,  $(0, 0, 1)$  является базисом пространства  $\mathbf{R}^3$ .

15. Для пространства матриц  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2$ , над полем  $\mathbb{Z}_2$  вычетов по модулю 2 укажите какой-нибудь базис и разложите вектор  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  по векторам этого базиса.

## 2. Координаты вектора. Связь между различными базисами пространства и координатами вектора в различных базисах. Изоморфизм линейных пространств

### Примеры

16. Найдем матрицы перехода от базиса  $e_1 = (1, 2, 1)$ ,  $e_2 = (2, 3, 3)$ ,  $e_3 = (3, 7, 1)$  к базису  $e'_1 = (3, 1, 4)$ ,  $e'_2 = (5, 2, 1)$ ,  $e'_3 = (1, 1, -6)$  пространства  $\mathbb{R}^3$  (см. пример 2) и обратно, а также координаты вектора  $a = (-17, -36, -11)$  в каждом из заданных базисов.

**Решение.** Для нахождения координат  $x_1, x_2, x_3$  вектора  $a$  в базисе  $e_1, e_2, e_3$  и матрицы  $T$  перехода от базиса  $e_1, e_2, e_3$  к базису  $e'_1, e'_2, e'_3$  составим и решим векторные уравнения:

$$a = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, \quad (1)$$

$$e'_1 = a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + a_{31} e_3, \quad (2)$$

$$e'_2 = a_{12} e_1 + a_{22} e_2 + a_{32} e_3, \quad (3)$$

$$e'_3 = a_{13} e_1 + a_{23} e_2 + a_{33} e_3. \quad (4)$$

Уравнение (1) дает  $(x_1, 2x_1, x_1) + (2x_2, 3x_2, 3x_2) + (3x_3, 7x_3, x_3) = (-17, -36, -11)$ , откуда получим систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -17, \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -36, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -11. \end{cases}$$

Аналогично уравнения (2), (3), (4) дадут соответственно следующие системы уравнений с такими же коэффициентами при новых неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11} + 2a_{21} + 3a_{31} = 3, \\ 2a_{11} + 3a_{21} + 7a_{31} = 1, \\ a_{11} + 3a_{21} + a_{31} = 4; \\ a_{12} + 2a_{22} + 3a_{32} = 5, \\ 2a_{12} + 3a_{22} + 7a_{32} = 2, \\ a_{12} + 3a_{22} + a_{32} = 1; \\ a_{13} + 2a_{23} + 3a_{33} = 1, \\ 2a_{13} + 3a_{23} + 7a_{33} = 1, \\ a_{13} + 3a_{23} + a_{33} = -6. \end{cases}$$

Поэтому все полученные четыре системы можно решить методом Гаусса одновременно:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & -17 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & -36 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -11 & 4 & 1 & -6 \end{array} \right) \sim$$

$$\begin{aligned}
&\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & -17 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -5 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & 1 & -4 & -7 \end{array} \right) \sim \\
&\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & -17 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -5 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -4 & -12 & -8 \end{array} \right) \sim \\
&\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -5 & -9 & -31 & -23 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -9 & -20 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -4 & -12 & -8 \end{array} \right) \sim \\
&\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -27 & -71 & -41 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 9 & 20 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 4 & 12 & 8 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Получаем:

$$\begin{aligned}
\alpha &= -1e_1 - 2e_2 - 4e_3, \\
e'_1 &= -27e_1 + 9e_2 + 4e_3, \\
e'_2 &= -71e_1 + 20e_2 + 12e_3, \\
e'_3 &= -41e_1 + 9e_2 + 8e_3.
\end{aligned}$$

Итак, числа  $-1, -2, -4$  являются координатами вектора  $\alpha$  в базисе  $e_1, e_2, e_3$ , а матрицей перехода от базиса  $e_1, e_2, e_3$  к базису  $e'_1, e'_2, e'_3$  будет матрица

$$T = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

Обратная к ней матрица

$$\begin{aligned}
T^{-1} &= \frac{1}{|T|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 52 & 76 & 181 \\ -36 & -52 & -126 \\ 28 & 40 & 99 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 13 & 19 & \frac{181}{4} \\ -9 & -13 & -\frac{63}{2} \\ 7 & 10 & \frac{99}{4} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

является матрицей перехода от базиса  $e'_1, e'_2, e'_3$  к базису  $e_1, e_2, e_3$ . Теперь находим столбец координат вектора  $\alpha$  в базисе  $e'_1, e'_2, e'_3$  (см. «Алгебра», с. 90):

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 19 & \frac{181}{4} \\ -9 & -13 & -\frac{63}{2} \\ 7 & 10 & \frac{99}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -232 \\ 161 \\ -126 \end{pmatrix}.$$

Проверка:  $x_1'e_1' + x_2'e_2' + x_3'e_3' = -232(3, 1, 4) + 161(5, 2, 1) - 126(1, 1, -6) = (-17, -36, -11) = a$ .

17. В пространстве  $F_4$  многочленов степени  $n \leq 3$  над  $\mathbf{R}$  даны два базиса:

а)  $1, x, x^2, x^3$ ; б)  $1, (x+1), (x+1)^2, (x+1)^3$ .

Найдем матрицы перехода от каждого из базисов к другому. Применим полученный результат для разложения многочлена  $f(x) = 1 + 5x^2 - 2x^3$  по степеням  $x+1$ .

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3, \\ 1+x &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3, \\ (1+x)^2 &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3, \\ (1+x)^3 &= 1 \cdot 1 + 3 \cdot x + 3 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3. \end{aligned}$$

Отсюда получаем матрицу перехода  $T$  от базиса а) к базису б):

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную к  $T$  матрицу, пользуясь методом элементарных преобразований:

$$\begin{aligned} &\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $T^{-1}$  является матрицей перехода от базиса б) к базису а).

Многочлен  $f(x) = 1 + 5x^2 - 2x^3$  имеет в базисе а) координаты  $1, 0, 5, -2$ . Его координаты  $t_1, t_2, t_3, t_4$  в базисе б) находим с помощью матрицы  $T$  по известной формуле:

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -16 \\ 11 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Итак,  $f(x) = 1 + 5x^2 - 2x^3 = 8 - 16(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+1)^3$ . Раскрывая скобки, убедимся в правильности найденного разложения.

18. По базису  $e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  пространства  $M_2$  вещественных квадратных матриц 2-го порядка построим какой-нибудь другой базис этого пространства и найдем в этом базисе координаты вектора  $a = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ .

**Решение.** Поскольку  $\dim M_2 = 2^2 = 4$ , то для нахождения нового базиса  $e'_1, e'_2, e'_3, e'_4$  достаточно взять в качестве матрицы  $T$  перехода от данного базиса к новому любую невырожденную матрицу 4-го порядка, например матрицу

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(как легко проверить,  $|T| = 2$ ).

Новый базис получаем из матричного равенства (см. «Алгебра», с. 88)

$$(e'_1 e'_2 e'_3 e'_4) = (e_{11} e_{12} e_{21} e_{22}) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

которое дает:

$$\begin{aligned} e'_1 &= 1 \cdot e_{11} + 2 \cdot e_{12} + 1 \cdot e_{21} + 1 \cdot e_{22} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ e'_2 &= 2 \cdot e_{11} + 3 \cdot e_{12} + 2 \cdot e_{21} + 3 \cdot e_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \\ e'_3 &= -1 \cdot e_{11} + 0 \cdot e_{12} + 1 \cdot e_{21} - 1 \cdot e_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \\ e'_4 &= -2 \cdot e_{11} - 1 \cdot e_{12} + 4 \cdot e_{21} + 0 \cdot e_{22} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Координаты  $u_1, u_2, u_3, u_4$  вектора  $a$  в новом базисе определяются из уравнения

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},$$

которое равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - y_3 - 2y_4 = 5, \\ 2y_1 + 3y_2 - y_4 = 7, \\ y_1 + 2y_2 + y_3 + 4y_4 = 3, \\ y_1 + 3y_2 - y_3 = 6. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем  $u_1 = 2, u_2 = 1, u_3 = -1, u_4 = 0$ .

19. Найдите координаты вектора  $z = 8 + 9i$  пространства  $\mathbb{C}$  комплексных чисел над полем  $\mathbb{R}$  в базисах: а)  $\frac{1}{2}, -3i$ ; б)  $2 - i, 4i$ .

20. Найдите координаты вектора  $a = (6, 0, -5)$  пространства  $\mathbb{R}^3$  в базисах:

а)  $(3, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 1)$ ;

б)  $(1, -1, 0), (1, 2, 3), (0, 1, -1)$

и сделайте проверку.

21. Найдите координаты вектора  $a = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$  пространства  $M_2$  вещественных квадратных матриц 2-го порядка в базисе

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и сделайте проверку.

22. Найдите координаты вектора  $f(x) = 6 - 5x + x^2$  из вещественного пространства многочленов степени  $\leq 3$  в базисах:

а)  $-2, -x, 2x^2, x^3$ ; б)  $1, x - 1, (x - 1)^2, (x - 1)^3$  и сделайте проверку.

23. Как изменятся координаты данного вектора  $a$ , если:

а) в заданном базисе поменять местами два его вектора, например первый вектор со вторым;

б) вместо базиса  $e_1, e_2, \dots, e_n$  взять базис  $e_n, e_{n-1}, \dots, e_1$ ?

24. Найдите матрицы переходов от базиса  $e_1, e_2, e_3$  пространства  $\mathbb{R}^3$  к базису  $e'_1, e'_2, e'_3$  и обратно, а также координаты вектора  $a = (3, 5, -4)$  в этих базисах, если

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e'_1 = (1, 1, 0),$$

$$e_2 = (0, 1, 0), \quad e'_2 = (0, 1, 1),$$

$$e_3 = (0, 0, 1); \quad e'_3 = (1, 0, 1).$$

25. Пусть  $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  — матрица перехода от базиса  $a_1,$

$a_2, a_3$  к базису  $b_1, b_2, b_3$ . Найдите координаты вектора  $a = 3a_1 - a_2 + 2a_3$  во втором базисе и координаты вектора  $b = 4b_1 - b_2 + 3b_3$  в первом базисе.

26. В вещественном пространстве многочленов степени  $\leq 2$  найдите матрицы переходов от базиса  $1, x, x^2$  к базису  $1 - x + 2x^2, -1 + \frac{3}{2}x - 3x^2, x$  и обратно, а также координаты многочлена  $f(x) = -4x^2$  в каждом из этих базисов.

27. В пространстве вещественных квадратных матриц 2-го порядка над полем  $\mathbb{R}$  найдите матрицы перехода от базиса

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



к базису

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; e'_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, e'_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и обратно, а также координаты вектора  $a = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$  в каждом из этих базисов. Сделайте проверку.

28. Может ли матрица

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

служить матрицей перехода от базиса  $e_1 = (1, -1, 0)$ ,  $e_2 = (1, 2, 3)$ ,  $e_3 = (0, 1, -1)$  пространства  $R^3$  к новому базису того же пространства? Если да, то найдите новый базис и координаты вектора  $a = (2, 1, 3)$  в этом базисе.

29. Докажите, что пространство матриц с действительными элементами вида  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  над полем  $R$  изоморфно пространству  $C$  комплексных чисел над тем же полем. Укажите взаимно однозначное соответствие, сохраняющее операции.

30. Убедитесь в том, что вещественное линейное пространство  $F_3$  многочленов степени  $\leq 2$  изоморфно арифметическому линейному пространству  $R^3$ . Если векторам базиса  $1, x, x^2$  пространства  $F_3$  сопоставлены соответственно векторы базиса  $(1, -1, 0)$ ,  $(1, 2, 3)$ ,  $(0, 1, -1)$  пространства  $R^3$ , то какой вектор  $\varphi(x)$  из  $F_3$  будет соответствовать вектору  $a = (2, 1, 3)$  из  $R^3$  и какой вектор из  $R^3$  будет соответствовать вектору  $f(x) = -4x^2$  из  $F_3$ ?

31. Докажите, что отношение изоморфизма линейных пространств над одним и тем же полем является отношением эквивалентности.

32. Докажите, что если два линейных пространства  $L$  и  $L'$  изоморфны, то произвольной линейной комбинации векторов пространства  $L$  соответствует такая же линейная комбинация соответствующих векторов пространства  $L'$ .

33. В пространстве вещественных квадратных матриц 2-го порядка разложите векторы  $a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $a_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ ,

$$a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \text{ по векторам базиса } e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Убедитесь в том, что в  $R^4$  система векторов, составленная из координатных строк векторов  $a_1, a_2, a_3$ , линейно зависима. Следует ли отсюда, что система векторов  $a_1, a_2, a_3$  также линейно зависима, и если да, то почему?

34. Используя свойство сохранения ранга при изоморфном отображении, найдите ранг следующих систем векторов в соответствующих пространствах:

$$\text{а) } a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } f_1 = 1 + 2x + x^2 + 2x^3, f_2 = -1 + 3x + 4x^2 + 5x^3, \\ f_3 = -5 + 2x^2 + 3x^3.$$

### § 3. ЛИНЕЙНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА И МНОГООБРАЗИЯ

#### 1. Подпространства линейного пространства

##### Примеры

1. В арифметическом пространстве  $\mathbf{R}^4$  найдем подпространство  $L$  решений однородной системы

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$$

его размерность и базис.

**Решение.** Составим матрицу данной системы и преобразуем ее к лестничному виду:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, система приводится к виду

$$\begin{cases} x_4 - x_2 - x_3 + 3x_1 = 0, \\ x_2 - 2x_3 + 4x_1 = 0. \end{cases}$$

Придавая свободным переменным  $x_3$  и  $x_1$  значения 1, 0 и 0, 1, находим фундаментальный набор решений т. е. базис  $L$ :  $\mathbf{a}_1 = (0, 2, 1, 3)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (1, -4, 0, -7)$ .

Итак,  $L = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} = k_1 \mathbf{a}_1 + k_2 \mathbf{a}_2, k_1, k_2 \in \mathbf{R}\}$ ,  $\dim L = 2$ .

2. Докажем, что в пространстве  $M_2$  вещественных квадратных матриц 2-го порядка над полем  $\mathbf{R}$  подмножество  $L$  матриц вида  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ) является его подпространством, а система векторов

$$\mathbf{e}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— базисом этого подпространства.

**Решение.** Пусть  $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$  — любые элементы из  $L$ . Тогда, очевидно,

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & b_1 + b_2 \end{pmatrix} \in L \text{ и } \lambda \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & 0 \\ 0 & \lambda b_1 \end{pmatrix} \in L.$$

Следовательно, множество  $L$  замкнуто относительно определенных в  $M_2$  операций сложения и умножения на число, а потому является подпространством пространства  $M_2$ .

Система векторов

$$\mathbf{e}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

линейно независима как подсистема базиса пространства  $M_2$ . Кроме того, любой элемент из  $L$  линейно разлагается по векторам  $\mathbf{e}_{11}$ ,  $\mathbf{e}_{22}$ , так как для любых  $a$  и  $b$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = ae_{11} + be_{22}.$$

Поэтому система  $e_{11}, e_{22}$  представляет собой базис подпространства  $L$ .

3. Зная, что  $F$  — вещественное линейное пространство многочленов степени  $\leq 10$ ,  $L_1$  — его подпространство многочленов степени  $\leq 3$ ,  $L_2$  — подпространство многочленов степени  $\leq 8$ , содержащих переменную  $x$  лишь в четных степенях, найдем размерность подпространств  $L_1, L_2, L_1 \cap L_2, L_1 + L_2$  и убедимся в справедливости формулы

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2).$$

**Решение.** Пусть  $f_1 = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3$  — любой вектор из  $L_1$ . Мы видим, что  $f_1$  линейно выражается через векторы системы векторов  $1, x, x^2, x^3$ , которые, как известно, составляют линейно независимую систему векторов. Следовательно, система  $1, x, x^2, x^3$  является одним из базисов подпространства  $L_1$ , а значит,  $\dim L_1 = 4$ . Точно так же убеждаемся, что система  $1, x^2, x^4, x^6, x^8$  является базисом подпространства  $L_2$ , и потому  $\dim L_2 = 5$ . Подпространство  $L_1 \cap L_2$  состоит лишь из тех многочленов степени  $\leq 3$ , которые содержат переменную  $x$  лишь в четных степенях. Поэтому система  $1, x^2$  является одним из базисов подпространства  $L_1 \cap L_2$ , а значит,  $\dim(L_1 \cap L_2) = 2$  (откуда, в частности, следует, что сумма  $L_1$  и  $L_2$  не является прямой).

Пусть  $f_2 = \mu_0 + \mu_2 x^2 + \mu_4 x^4 + \mu_6 x^6 + \mu_8 x^8$  — любой вектор из  $L_2$ , тогда вектор  $f = f_1 + f_2$  принадлежит  $L_1 + L_2$ , причем  $f = (\lambda_0 + \mu_0) + (\lambda_1) x + (\lambda_2 + \mu_2) x^2 + \lambda_3 x^3 + \mu_4 x^4 + \mu_6 x^6 + \mu_8 x^8$ ; как видим, сумма  $L_1 + L_2$  содержит все векторы линейно независимой системы векторов  $1, x, x^2, x^3, x^4, x^6, x^8$  и любой вектор суммы линейно выражается через векторы этой системы, а поэтому данная система является базисом подпространства  $L_1 + L_2$ , а значит,  $\dim(L_1 + L_2) = 7$ . Но  $7 = 4 + 5 - 2$ , т. е.

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2).$$

4. Подпространства  $L_1 = L(a_1, a_2, a_3)$ ,  $L_2 = L(b_1, b_2, b_3)$  натянуты на следующие системы векторов:

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, 2, 1), & b_1 &= (2, 3, -1), \\ a_2 &= (1, 1, -1), & b_2 &= (1, 2, -2), \\ a_3 &= (1, 3, 3), & b_3 &= (1, 1, -3). \end{aligned}$$

Найдем базисы и размерности подпространств  $L_1, L_2, L_1 \cap L_2, L_1 + L_2$ .

**Решение.** а) Найдем базис и размерность подпространства  $L_1$ . Для этого приведем матрицу, составленную из строк  $a_1, a_2, a_3$ , к лестничному виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, система векторов  $a_1, a_2$  линейно независима, а вектор  $a_3$  линейно выражается через  $a_1, a_2$ . Но тогда по определению

линейной оболочки всякий вектор пространства  $L_1$  также выражается через векторы  $a_1, a_2$ , которые, следовательно, составляют базис подпространства  $L_1$ . Поэтому  $\dim L_1 = 2$  и

$$L_1 = L(a_1, a_2) = \{x | x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Аналогично из преобразований

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

вытекает, что базис  $L_2$  состоит из векторов  $b_2, b_3$ ,  $\dim L_2 = 2$  и

$$L_2 = \{x | x = \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}\}.$$

б) Найдем базис и размерность подпространства  $L_1 \cap L_2$ . По определению пересечения всякий вектор из  $L_1 \cap L_2$  имеет вид:

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3.$$

Таким образом,

$$(\lambda_1, 2\lambda_1, \lambda_1) + (\lambda_2, \lambda_2, -\lambda_2) = (\mu_2, 2\mu_2, 2\mu_2) + (\mu_3, \mu_3, -3\mu_3)$$

или

$$(\lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2) = (\mu_2 + \mu_3, 2\mu_2 + \mu_3, 2\mu_2 - 3\mu_3),$$

откуда получаем систему уравнений для коэффициентов  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \mu_2 + \mu_3, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 2\mu_2 + \mu_3, \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 2\mu_2 - 3\mu_3, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \mu_2 - \mu_3 = 0, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - 2\mu_2 - \mu_3 = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_2 - 2\mu_2 + 3\mu_3 = 0. \end{cases}$$

Приводим систему к лестничному виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \mu_2 - \mu_3 = 0, \\ -\lambda_2 + \mu_3 = 0, \\ -\mu_2 + 2\mu_3 = 0. \end{cases}$$

Поскольку  $\mu_3$  можно принять за свободное неизвестное, а  $\mu_2 = 2\mu_3$ , то всякий вектор  $x \in L_1 \cap L_2$  имеет вид:

$$x = \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3 = 2\mu_3 b_2 + \mu_3 b_3 = \mu_3 (2b_2 + b_3) = \mu_3 (2 \cdot (2, 4, 4) + (1, 1, -3)) = \mu_3 (3, 5, 1),$$

т. е. вектор  $(3, 5, 1)$  составляет базис подпространства  $L_1 \cap L_2$ , так что  $\dim (L_1 \cap L_2) = 1$ .

в) По определению суммы подпространств всякий вектор суммы  $L_1 + L_2$  имеет вид  $y = x_1 + x_2$ , где  $x_1 \in L_1 = L(a_1, a_2)$ ,  $x_2 \in L_2 = L(b_2, b_3)$ , и потому  $y = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 b_2 + \alpha_4 b_3$ , т. е.  $L_1 + L_2$

есть линейная оболочка системы векторов  $a_1, a_2, b_2, b_3$ . Поэтому чтобы найти базис  $L_1 + L_2$ , нужно выделить в этой системе базис. Составляя и преобразуя матрицу со строками  $a_1, a_2, b_2, b_3$ , имеем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда заключаем, что система векторов  $a_1, a_2, b_2$  является одним из базисов подпространства  $L_1 + L_2$ , так что  $\dim(L_1 + L_2) = 3$ . Проверка:  $\dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2) = 2 + 2 - 1 = 3 = \dim(L_1 + L_2)$ .

5. Найдем базис и размерность линейного подпространства  $L(f_1, f_2, f_3)$ , натянутого на следующую систему векторов пространства многочленов степени  $\leq 2$  (над полем  $\mathbf{R}$ ):

$$f_1 = 3 + x + 2x^2, \quad f_2 = -2 + x - x^2, \quad f_3 = 1 + 2x + x^2.$$

**Решение.** По определению линейной оболочки всякий вектор  $f(x) \in L(f_1, f_2, f_3)$  имеет вид  $f(x) = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$ . В базисе  $1, x, x^2$  пространства многочленов степени  $\leq 2$  заданные многочлены  $f_1, f_2, f_3$  имеют соответственно координатные строки  $(3, 1, 2)$ ,  $(-2, 1, -1)$ ,  $(1, 2, 1)$ . Составим из них матрицу и найдем ее ранг:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,  $\text{Rg } A = 2$ , система строк  $(3, 1, 2)$ ,  $(-2, 1, -1)$ , а значит, и система многочленов  $f_1, f_2$  линейно независимы, строка  $(1, 2, 1)$  линейно выражается через остальные строки, а потому многочлен  $f_3$  линейно выражается через  $f_1$  и  $f_2$ . Следовательно, всякий вектор  $f(x)$  из  $L(f_1, f_2, f_3)$  может быть линейно выражен через  $f_1, f_2$ , а потому система  $f_1, f_2$  есть базис подпространства  $L(f_1, f_2, f_3) = L(f_1, f_2)$ , так что его размерность равна 2.

#### Упражнения для самостоятельного решения

6. Выясните, является ли линейным подпространством соответствующего линейного пространства каждое из нижеприведенных множеств векторов:

а) множество векторов пространства  $\mathbf{R}^n$ , компоненты которых целые числа;

б) множество векторов плоскости, исходящих из начала координат, концы которых лежат на данной прямой;

в) множество векторов плоскости, исходящих из начала координат, концы которых лежат на одной из осей координат;

г) множество векторов плоскости, исходящих из начала координат, концы которых лежат во второй четверти;

д) множество векторов пространства вещественных квадратных матриц порядка  $n$  над полем  $\mathbf{R}$ , состоящее из невырожденных матриц;

е) множество векторов пространства вещественных квадратных матриц порядка  $n$  над полем  $\mathbf{R}$ , состоящее из матриц, у которых первая строка нулевая;

ж) множество векторов пространства вещественных квадратных матриц с целочисленными компонентами;

з) множество векторов пространства вещественных квадратных матриц порядка 2 над полем  $\mathbf{R}$ , состоящее из матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

7. Докажите, что нижеприведенные множества векторов образуют линейные подпространства соответствующих пространств, и найдите их базис и размерность:

а) множество векторов пространства  $\mathbf{R}^6$ , у которых первая и последняя компоненты равны между собой;

б) множество векторов пространства  $\mathbf{R}^6$ , которые имеют вид  $(\alpha, \beta, \alpha, \beta, \alpha, \beta)$ ;

в) множество векторов пространства квадратных матриц 2-го порядка над полем  $\mathbf{R}$ , состоящее из матриц вида  $\begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix}$ .

8. Узнайте, принадлежит ли вектор  $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  из пространства  $M_2$  вещественных квадратных матриц порядка 2 над полем  $\mathbf{R}$  линейной оболочке векторов

$$a_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

9. Найдите базис и размерность подпространств (соответствующих пространств), порожденных векторами:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } a_1 = (2, 1, 1, 0), & \text{б) } a_1 = (1, 2, 1, 2), \\ a_2 = (3, 2, -1, -2), & a_2 = (2, 1, 2, 1), \\ a_3 = (1, 1, -2, -2), & a_3 = (-1, 1, -1, 1); \\ a_4 = (-1, 0, -3, -2); & \end{array}$$

$$\text{в) } a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } f_1 = 2x + x^2, \quad f_2 = -2 + x - x^2, \quad f_3 = 4 + 3x^2.$$

10. В пространстве  $\mathbf{R}^4$  подпространства  $L_1, L_2$  порождаются соответственно векторами  $a_1, a_2, a_3$  и  $b_1, b_2$ :

$$\begin{array}{ll} a_1 = (1, 2, 0, 1), & b_1 = (1, 0, 1, 0), \\ a_2 = (1, 1, 1, 0), & b_2 = (1, 3, 0, 1), \\ a_3 = (3, 5, 1, 2); & \end{array}$$

Найдите базис и размерность подпространств  $L_1, L_2, L_1 \cap L_2, L_1 + L_2$ .

11. Для пространств решений следующих систем укажите какие-нибудь базисы (фундаментальные наборы решений):

$$а) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 6x_1 - 12x_2 + 17x_3 - 9x_4 = 0, \\ 7x_1 - 14x_2 + 18x_3 + 17x_4 = 0; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0; \end{cases}$$

$$в) x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0.$$

12. Докажите, что если  $L$  — линейное пространство размерности  $n$  и  $L_1, L_2$  — его подпространства размерностей  $r$  и  $s$ , то в случае  $r + s > n$  пересечение  $L_1 \cap L_2$  содержит по крайней мере один ненулевой вектор.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь тем, что система, полученная объединением базисов подпространств  $L_1$  и  $L_2$ , линейно зависима.

13. Докажите, что если  $L$  — трехмерное пространство, а  $L_1, L_2$  — его ненулевые подпространства, такие, что их прямая сумма дает  $L$ , то одно из этих подпространств является одномерным, а другое двумерным.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь формулой  $\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2$ .

14. Докажите, что если  $L$  — трехмерное линейное пространство, а  $L_1, L_2$  — различные двумерные подпространства, то  $L_1 \cap L_2$  — одномерное подпространство и  $L = L_1 + L_2$ .

15. Докажите, что если размерность суммы двух линейных подпространств на единицу больше размерности их пересечения, то сумма совпадает с одним из этих подпространств, а пересечение с другим.

16. Докажите, что если система векторов  $a, b$  линейно независима, то их линейная оболочка  $L(a, b)$  совпадает с прямой суммой  $L(a) + L(b)$  линейных оболочек  $L(a), L(b)$  соответственно векторов  $a$  и  $b$ .

17. Докажите, что если  $L_1$  и  $L_2$  — различные одномерные подпространства двумерного линейного пространства  $L$ , то  $L$  является прямой суммой подпространств  $L_1$  и  $L_2$ .

## 2. Линейные многообразия

### Примеры

18. Проверим, что вектор  $a = (1, 0, 0, 0)$  служит вектором сдвига для многообразия решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \end{cases}$$

и найдем базис направляющего подпространства  $L$  этого многообразия.

**Решение.** Непосредственной подстановкой убеждаемся, что вектор  $(1, 0, 0, 0)$  служит решением данной системы и поэтому является вектором сдвига для многообразия решений.

Для отыскания базиса направляющего подпространства  $L$  строим фундаментальный набор решений соответствующей однородной системы. Имеем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Полагая здесь поочередно  $x_3 = 1, x_4 = 0$  и  $x_3 = 0, x_4 = 1$ , получаем фундаментальный набор из двух решений:

$$\mathbf{a}_1 = (11, -5, 1, 0), \quad \mathbf{a}_2 = (-7, 3, 0, 1).$$

Таким образом, многообразие  $M$  решений системы можно представить в виде:

$$M = \mathbf{a} + L = (1, 0, 0, 0) + k_1(11, -5, 1, 0) + k_2(-7, 3, 0, 1), \\ k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

19. Докажем, что прямые (одномерные многообразия)  $M_1 = \mathbf{a}_1 + L_1$  и  $M_2 = \mathbf{a}_2 + L_2$  линейного пространства  $L$  пересекаются и не совпадают тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) система векторов  $\mathbf{b}_1$  и  $\mathbf{b}_2$ , порождающих подпространства  $L_1$  и  $L_2$ , линейно независима;

2) вектор  $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$  линейно выражается через векторы  $\mathbf{b}_1$  и  $\mathbf{b}_2$ .

**Решение.** Пусть прямые  $M_1$  и  $M_2$  пересекаются в точке  $\mathbf{a}$  и не совпадают. Тогда  $L_1 \neq L_2$  (см. «Алгебра», с. 97). Отсюда следует, что система векторов  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  линейно независима. Кроме того, так как  $\mathbf{a} \in M_1$  и  $\mathbf{a} \in M_2$ , то  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + t_1\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_2 + t_2\mathbf{b}_2$ , и, значит,  $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = t_2\mathbf{b}_2 - t_1\mathbf{b}_1$ .

Обратно, пусть прямые  $M_1 = \mathbf{a}_1 + \lambda_1\mathbf{b}_1$ ,  $M_2 = \mathbf{a}_2 + \lambda_2\mathbf{b}_2$  таковы, что выполняются условия 1) и 2). По условию 2)  $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = t_1\mathbf{b}_1 + t_2\mathbf{b}_2$ , т. е.  $\mathbf{a}_1 - t_1\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_2 + t_2\mathbf{b}_2$ , а так как  $\mathbf{a}_1 - t_1\mathbf{b}_1 \in M_1$ ,  $\mathbf{a}_2 + t_2\mathbf{b}_2 \in M_2$ , то прямые  $M_1$  и  $M_2$  пересекаются.

#### Упражнения для самостоятельного решения

20. Докажите, что векторы  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  линейного пространства тогда и только тогда принадлежат некоторому линейному многообразию  $M$  с направляющим подпространством  $L$ , когда их разность  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  принадлежит  $L$ .

21. Докажите, что если  $\mathbf{y} \in \mathbf{x} + L$ , то  $\mathbf{y} + L = \mathbf{x} + L$ .

22. Докажите, что если  $L_1$  и  $L_2$  — подпространства линейного пространства  $L$  и  $M_1 = \mathbf{x}_1 + L_1, M_2 = \mathbf{x}_2 + L_2$ , то линейные многообразия  $M_1$  и  $M_2$  совпадают тогда и только тогда, когда  $L_1 = L_2$  и  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in L_2$ .



Указание. Если  $M_1 = M_2 = M$ , то  $x_1 = x_2 + a_2$ , где  $a_2 \in L_2$ , т. е.  $x_1 - x_2 \in L_2$ . Если  $a_1 \in L_1$ , то существует вектор  $a_2 \in L_2$ , такой, что  $x_2 + a_2 = x_1 + a_1$ , т. е.  $a_1 \in L_2$ . Значит,  $L_1 \subseteq L_2$ . Аналогично  $L_2 \subseteq L_1$ .

23. В пространстве вещественных квадратных матриц порядка 2 над полем  $\mathbf{R}$  заданы два многообразия  $H_0 = a_0 + L$  и  $H_1 = a_1 + L$ , причем

$$a_0 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -6 \end{pmatrix},$$

а  $L$  есть подпространство матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Найдите базис  $L$  и выясните, совпадают ли  $H_0$  и  $H_1$ .

24. Найдите базисы направляющих подпространств и векторы сдвига для многообразий решений следующих систем уравнений:

а) 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1; \end{cases}$$

б)  $x_1 + x_2 + x_3 = 1;$

в) 
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

25. Выясните, пересекаются ли в пространстве  $\mathbf{R}^4$  прямые (векторные многообразия)  $M_1 = a_1 + \lambda_1 b_1$  и  $M_2 = a_2 + \lambda_2 b_2$ , если:

а)  $a_1 = (-1, -2, 0, 3), \quad a_2 = (2, 1, 0, 3),$   
 $b_1 = (1, -1, 0, 2), \quad b_2 = (1, 2, 0, -1);$

б)  $a_1 = (2, 3, 1, -2), \quad a_2 = (1, 3, 1, -3),$   
 $b_1 = (1, -1, 0, 2), \quad b_2 = (-2, 2, 0, -4);$

в)  $a_1 = (-1, -2, -1, 3), \quad a_2 = (2, 1, 0, 3),$   
 $b_1 = (1, -1, 0, 2), \quad b_2 = (1, 2, 0, -1).$

В тех случаях, когда прямые пересекаются, найдите точку их пересечения (общий вектор многообразий  $M_1$  и  $M_2$ ).

26. В пространстве  $\mathbf{R}^2$  подпространства  $L_1$  и  $L_2$  порождены соответственно векторами  $b_1 = (2, 1)$  и  $b_2 = (3, 3)$ . Докажите, что прямые  $M_1 = a_1 + \lambda_1 b_1$ ,  $M_2 = a_2 + \lambda_2 b_2$ , где  $a_1 = (1, -1)$ ,  $a_2 = (2, -2)$ , пересекаются, и найдите точку их пересечения.

27. В пространстве  $M_2$  всех вещественных квадратных матриц 2-го порядка над полем  $\mathbf{R}$  подпространства  $L_1$  и  $L_2$  порождены соответственно векторами

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Покажите, что одномерные многообразия  $M_1 = a_1 + \lambda_1 b_1$  и  $M_2 = a_2 + \lambda_2 b_2$ , где

$$a_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

пересекаются и не совпадают. Найдите общий вектор многообразий.

# Глава III

## ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

### § 1. СКАЛЯРНОЕ УМНОЖЕНИЕ В ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ. ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

#### Примеры

1. Докажем, что любое  $n$ -мерное вещественное векторное пространство можно превратить в евклидово пространство.

**Решение.** Надо доказать, что в любом конечномерном пространстве  $L$  над полем  $\mathbf{R}$  можно определить скалярное произведение. Пусть  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — любой базис пространства  $L$ ,  $x$  и  $y$  — любые векторы из  $L$ , а  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  и  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  — их координаты в данном базисе:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n, \\ y &= \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n, \end{aligned}$$

где  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbf{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Положим

$$(x, y) = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n \quad (1)$$

и покажем, что при таком определении все свойства 1—4 скалярного произведения векторов (см. «Алгебра», с. 102) будут выполнены.

1) Имеем:

$$(x, x) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2.$$

Поэтому в силу свойств поля  $\mathbf{R}$   $(x, x) \geq 0$ . Кроме того,  $(x, x) = 0$  лишь тогда, когда  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ , т. е. когда  $x = 0$ .

2) Из коммутативности умножения в  $\mathbf{R}$  вытекает, что

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i = \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i = (y, x).$$

3) Поскольку вектор  $ky$  имеет в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  координаты  $k\beta_1, k\beta_2, \dots, k\beta_n$ , то по свойству дистрибутивности умножения относительно сложения в поле  $\mathbf{R}$

$$(x, ky) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (k\beta_i) = k \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i = k(x, y).$$

4) Пусть вектор  $z$  имеет в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  координаты  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ . Тогда вектор  $y + z$  имеет координаты  $\beta_1 + \gamma_1, \beta_2 + \gamma_2, \dots, \beta_n + \gamma_n$ . Пользуясь свойством дистрибутивности умножения относительно сложения в поле  $\mathbf{R}$ , получим:

$$(x, y + z) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\beta_i + \gamma_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i \gamma_i = (x, y) + (x, z).$$

Полученные результаты означают, что формула (1) определяет в  $L$  скалярное произведение и потому  $L$  с заданным формулой (1) скалярным произведением является евклидовым пространством.

2. Докажем, что в  $n$ -мерном пространстве  $F$  многочленов степени  $\leq n-1$  с действительными коэффициентами скалярное произведение двух векторов можно определить формулой

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx, \quad (2)$$

где  $a$  и  $b$  — фиксированные действительные числа,  $a < b$ .

Решение. Используя свойства определенного интеграла и формулу (2), получим:

$$1) (f, f) = \int_a^b f^2(x) dx \geq 0, \text{ и если } (f, f) = 0, \text{ то } f = 0 + 0 \cdot x + \dots + 0 \cdot x^{n-1};$$

$$2) (f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx = \int_a^b g(x) f(x) dx = (g, f);$$

$$3) (f, kg) = \int_a^b f(kg) dx = \int_a^b k(fg) dx = k \int_a^b fg dx = k(f, g);$$

$$4) (f, f_1 + f_2) = \int_a^b f(f_1 + f_2) dx = \int_a^b f f_1 dx + \int_a^b f f_2 dx = (f, f_1) + (f, f_2).$$

Полученные результаты означают, что формула (2) определяет в  $F$  скалярное произведение.

3. Докажем, что в любом  $n$ -мерном евклидовом пространстве справедлива теорема косинусов.

Решение. Пусть векторы  $a, b, c$  обозначают соответственно вершины  $A, B, C$  некоторого треугольника, тогда по определению длины вектора получим:

$$\begin{aligned} |AB| &= |a - b| = \sqrt{(a - b, a - b)}, \\ |AC| &= |a - c| = \sqrt{(a - c, a - c)}, \\ |BC| &= |b - c| = \sqrt{(b - c, b - c)}. \end{aligned}$$

Обозначая через  $\alpha$  величину угла между векторами  $b - a$  и  $c - a$ , имеем по определению:

$$\cos \alpha = \frac{(b - a, c - a)}{|AB| \cdot |AC|}.$$

Применяя свойства скалярного произведения, найдем, что

$$\begin{aligned}
 & |AB|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \cos \alpha = \\
 & = (a-b, a-b) + (a-c, a-c) - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \frac{(b-a, c-a)}{|AB| \cdot |AC|} = \\
 & = (a, a) - 2(a, b) + (b, b) + (a, a) - 2(a, c) + (c, c) - \\
 & - 2(b, c) + 2(a, c) + 2(a, b) - 2(a, a) = (b, b) - 2(b, c) + (c, c) = \\
 & = (b-c, b-c) = |BC|^2.
 \end{aligned}$$

Итак,

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB| \cdot |AC| \cdot \cos \alpha,$$

что и следовало получить.

#### Упражнения для самостоятельного решения

4. Выясните, можно ли в  $n$ -мерном арифметическом векторном пространстве  $R^n$  задать скалярное произведение  $(x, y)$  с помощью формулы

$$(x, y) = \alpha_1 \beta_1 + 2\alpha_2 \beta_2 + 3\alpha_3 \beta_3 + \dots + n\alpha_n \beta_n,$$

где  $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ,  $y = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ .

5. Можно ли в любом  $n$ -мерном вещественном пространстве задать скалярное произведение формулой

$$(x, y) = \alpha_1 \cdot \beta_1 + \alpha_2 \cdot \beta_2 + \dots + \alpha_{n-1} \cdot \beta_{n-1},$$

если  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$  и  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n$  — координаты векторов  $x$  и  $y$  в некотором фиксированном базисе?

6. Докажите, что из определения скалярного произведения вытекают следующие его свойства:

а)  $(x, 0) = 0$ ;

б)  $(x_1 - x_2, y) = (x_1, y) - (x_2, y)$ .

В задачах 7—9 скалярное произведение арифметических векторов определяется формулой

$$((\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)) = \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n.$$

7. Найдите длины арифметических векторов

$$a = (3, 2, 1, 1, 1), \quad b = (-5, 0, \sqrt{3}, -2\sqrt{3})$$

и расстояние между точками

$$x = (5, 7, 5, 7, 2), \quad y = (6, 4, 4, 4, 6).$$

8. Определите угол между векторами  $a$  и  $b$ :

а)  $a = (2, 1, 3, 2)$ ,  $b = (1, 2, -2, 1)$ ;

б)  $a = (4, 0, 2, 0, 4)$ ,  $b = (3, 3, 3, 3, 0)$ .

9. Определите длины сторон и внутренние углы треугольника, вершины которого  $A, B, C$  заданы соответственно векторами:

а)  $a = (0, 2, 1)$ ,  $b = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ,  $c = (1, 2, 0)$ ;

б)  $a = (3, -1, 3, -1)$ ,  $b = (4, 0, 2, 0)$ ,  $c = (3, 1, 3, 1)$ .

10. Покажите, что в любом евклидовом пространстве для всякого вектора  $x$  и всякого действительного  $\alpha$

$$|\alpha x| = |\alpha| \cdot |x|.$$

11. Докажите, что в любом  $n$ -мерном евклидовом пространстве справедливы теоремы:

а) сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон;

б) квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его ребер, выходящих из одной вершины.

12. Докажите, что для любых векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  евклидова пространства имеет место равенство

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2).$$

13. Докажите, что если  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — такие векторы евклидова пространства, для которых  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ , то

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) = 0.$$

14. Докажите, что если  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  — векторы какого-либо евклидова пространства, причем  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ , то

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2.$$

15. Напишите неравенство Коши—Буняковского для векторов  $f(x)$  и  $g(x)$  пространства  $F$  многочленов степени  $\leq n-1$  над полем  $\mathbf{R}$ , если скалярное произведение в пространстве  $F$  задано так, как в примере 2 данного параграфа.

16. Напишите неравенство Коши—Буняковского для векторов

$$\mathbf{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad \mathbf{y} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

пространства  $\mathbf{R}^n$ , если скалярное произведение в  $\mathbf{R}^n$  определено так, как в примерах 7—9 данного параграфа; используя это неравенство, докажите следующие неравенства:

$$\begin{aligned} & \text{а) } \sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \dots + \sqrt{a_n b_n} \leq \\ & \leq \sqrt{a_1 + a_2 + \dots + a_n} + \sqrt{b_1 + b_2 + \dots + b_n}, \end{aligned}$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  — любые положительные числа;

$$\begin{aligned} & \text{б) } \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2} \leq \\ & \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}, \end{aligned}$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  — любые действительные числа.

17. Покажите, что в неравенстве Коши—Буняковского

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y})$$

равенство имеет место тогда и только тогда, когда система векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  линейно зависима.

У к а з а н и е. Если векторы  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  линейно независимы, то при любом  $\alpha$  вектор  $\mathbf{x} - \alpha\mathbf{y} \neq 0$ , откуда  $(\mathbf{x} - \alpha\mathbf{y}, \mathbf{x} - \alpha\mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{y})\alpha^2 - 2(\mathbf{x}, \mathbf{y})\alpha + (\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ . Рассмотрите дискриминант этого квадратного трехчлена.

18. Докажите, что для любых векторов  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  евклидова пространства справедливо неравенство

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$$

(неравенство треугольника).

19. Докажите следующие неравенства:

$$a) |x| - |y| \leq |x + y|;$$

$$б) |x| - |y| \leq |x - y|,$$

где  $x, y$  — любые векторы евклидова пространства.

## § 2. ОРТОГОНАЛЬНАЯ СИСТЕМА ВЕКТОРОВ. ОРТОНОРМИРОВАННЫЙ БАЗИС. ПРОЦЕСС ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ

### Примеры

1. Исследуем на ортогональность векторы  $a_1 = (2, 1, -4, 2)$  и  $a_2 = (4, 8, 2, -4)$ , заданные своими координатами в некотором ортонормированном базисе пространства  $R^4$ , а затем пронормируем эти векторы.

Решение. Так как векторы  $a_1, a_2$  заданы координатами в ортонормированном базисе, то  $(a_1, a_2) = 2 \cdot 4 + 1 \cdot 8 + (-4) \cdot 2 + 2 \cdot (-4) = 0$ , а потому векторы  $a_1, a_2$  ортогональны и составляют линейно независимую систему.

Нормируя  $a_1$  и  $a_2$ , получаем векторы

$$b_1 = \frac{a_1}{\sqrt{(a_1, a_1)}} = \frac{a_1}{\sqrt{4 + 1 + 16 + 4}} = \frac{1}{5} a_1 = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right),$$

$$b_2 = \frac{a_2}{\sqrt{(a_2, a_2)}} = \frac{a_2}{\sqrt{16 + 64 + 4 + 16}} = \frac{1}{10} a_2 = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right).$$

2. Методом ортогонализации построим ортонормированный базис подпространства  $L_1$ , натянутого на следующую систему векторов пространства  $R^4$ :  $a_1 = (1, 0, 0, -1)$ ,  $a_2 = (2, 1, 1, 0)$ ,  $a_3 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $a_4 = (1, 2, 3, 4)$ ,  $a_5 = (0, 1, 2, 3)$ , заданных своими координатами в некотором ортонормированном базисе.

Решение. 1) Находим сначала базис подпространства  $L_1 = L(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. ранг данной системы векторов равен 3 и система векторов  $a_1, a_2, a_4$  линейно независима. Следовательно, векторы  $a_1, a_2, a_4$  составляют базис  $L_1$ .

2) Ортогонализируем найденный базис. Положим  $b_1 = a_1$ . Вторым вектор  $b_2$  получим по формуле

$$b_2 = a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1.$$

Имеем:  $(a_2, b_1) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 2$ ,  $(b_1, b_2) = 1^2 + 0^2 + 0^2 + (-1)^2 = 2$  и  $b_2 = a_2 - 1 \cdot b_1 = (1, 1, 1, 1)$ .

Третий вектор  $b_3$  получим по формуле

$$b_3 = a_4 - \frac{(a_4, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(a_4, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2,$$

$$\text{откуда } \mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_4 - \frac{3}{2} \mathbf{b}_1 - \frac{5}{2} \mathbf{b}_2 = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right).$$

Следовательно, система  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  является искомым ортогональным базисом. (Ортогональность базиса легко проверяется, например,

$$(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 0 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot 0 = 0.)$$

3) Нормируем найденный ортогональный базис:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{b}_1}{\sqrt{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)}} = \frac{\mathbf{b}_1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{b}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{b}_2}{\sqrt{(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2)}} = \frac{\mathbf{b}_2}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{b}_3}{\sqrt{(\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_3)}} = \sqrt{2} \mathbf{b}_3 = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

Итак, ортонормированным базисом подпространства  $L_1$  является система векторов

$$\mathbf{e}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \mathbf{e}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$\mathbf{e}_3 = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

3. В евклидовом пространстве многочленов степени  $\leq 2$  над  $\mathbf{R}$  со скалярным произведением, задаваемым равенством  $(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x) dx$ , ортогонализируем базис  $f_1(x)=1, f_2(x)=x, f_3(x)=x^2$ .

**Решение.** Строим по данному базису новый базис  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ . За первый вектор принимаем  $\varphi_1(x) = f_1(x)$ , т. е.  $\varphi_1(x) = 1$ . Второй вектор  $\varphi_2(x)$  ищем в виде

$$\varphi_2(x) = f_2(x) + \lambda \varphi_1(x) = x + \lambda 1,$$

где

$$\lambda = -\frac{(f_2, \varphi_1)}{(\varphi_1, \varphi_1)} = -\frac{\int_0^1 x \cdot 1 \cdot dx}{\int_0^1 1 \cdot 1 \cdot dx} = -\frac{\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Следовательно, } \varphi_2(x) = x - \frac{1}{2} \cdot 1 = x - \frac{1}{2}.$$

Третий вектор  $\varphi_3(x)$  ищем в виде

$$\varphi_3(x) = f_3(x) + \mu_1 \varphi_1(x) + \mu_2 \varphi_2(x),$$

где

$$\mu_1 = -\frac{(f_3, \varphi_1)}{(\varphi_1, \varphi_1)} = -\frac{1}{3}, \quad \mu_2 = -\frac{(f_3, \varphi_2)}{(\varphi_2, \varphi_2)} = -1.$$

Таким образом, вектор  $\varphi_3(x) = x^3 - \frac{1}{3} \cdot 1 - 1 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = x^3 - x + \frac{1}{6}$ . Следовательно, искомым базис состоит из векторов  $1, x - \frac{1}{2}, x^3 - x + \frac{1}{6}$ .

#### Упражнения для самостоятельного решения

4. Покажите, что в евклидовом пространстве многочленов степени  $\leq 2$  над полем  $\mathbb{R}$  со скалярным произведением, задаваемым формулой  $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ , векторы  $f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2 - \frac{1}{3}$  попарно ортогональны. Составляют ли они базис этого пространства?

5. Ортогонализируйте нижеприведенные системы векторов, заданных своими координатами в некотором ортонормированном базисе:

а)  $(3, 2, 1), (1, 0, 2), (1, 1, 3)$ ;

б)  $(1, 1, -1, -2), (4, 1, -2, 3), (3, 4, -1, 2)$ .

Убедитесь в попарной ортогональности найденных векторов непосредственно.

6. Произведите нормирование векторов ортогонального базиса  $f_1(x) = 1, f_2(x) = x - \frac{1}{2}, f_3(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$  вещественного пространства многочленов степени  $\leq 2$  со скалярным произведением, задаваемым формулой  $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$  (см. пример 3). В полученном ортонормированном базисе найдите координаты векторов

$f_1(x) = -(1 + 2\sqrt{3}) + 4\sqrt{3}x, f_2(x) = 2 + \sqrt{5} - 6\sqrt{5}x + \sqrt{5}x^2$  и вычислите  $(f_1, f_2), |f_1|, |f_2|$ . Убедитесь в том, что векторы  $f_1 - f_2$  и  $f_1 + f_2$  взаимно ортогональны.

7. Покажите, что в евклидовом пространстве вещественных функций, определенных и непрерывных на отрезке  $-\pi \leq x \leq \pi$ , со скалярным произведением, задаваемым формулой  $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ , любые два вектора системы

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx$$

попарно ортогональны.

8. Докажите, что если  $a_1, a_2, \dots, a_k$  — система попарно ортогональных векторов, то



$$|a_1 + a_2 + \dots + a_k|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_k|^2$$

(обобщение теоремы Пифагора).

9. Докажите, что если ненулевой вектор  $b \in E^n$  ортогонален каждому из векторов  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , то он ортогонален каждому из векторов подпространства  $L$ , натянутого на векторы  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , не содержится в  $L$ , а система векторов  $a_1, a_2, \dots, a_k$  линейно независима.

10. Докажите, что подпространство  $L$  векторов пространства  $E^n$ , ортогональных ненулевому вектору  $b \in E^n$ , имеет размерность  $n - 1$ .

В последующих примерах 11—16 пространство  $R^n$  понимается как  $n$ -мерное арифметическое евклидово пространство, в котором скалярное произведение любых векторов  $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  и  $b = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  определяется по формуле

$$(a, b) = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n.$$

11. Ортогональную систему векторов  $a_1 = (1, -2, 2, -3)$ ,  $a_2 = (2, -3, 2, 4)$  евклидова пространства  $R^4$  дополните до ортогонального базиса этого пространства.

У к а з а н и е. Ортогонализируйте фундаментальный набор решений системы уравнений

$$(a_1, x) = 0, \quad (a_2, x) = 0.$$

12. Проверьте, что векторы системы  $a_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ,  $a_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$  евклидова пространства  $R^4$  ортогональны и нормированы, и дополните данную систему до ортонормированного базиса этого пространства.

13. В евклидовом пространстве  $R^4$  для подпространства  $L$  решений системы уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ -6x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

постройте ортогональный базис.

14. Постройте ортонормированный базис подпространства, натянутого на следующие системы векторов:

а)  $a_1 = (1, 2, 0, 1)$ ,  $a_2 = (1, 1, 1, 0)$ ,  $a_3 = (1, 0, 1, 0)$ ,  $a_4 = (1, 3, 0, 1)$ ;

б)  $a_1 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $a_2 = (1, -1, 1, 4)$ ,  $a_3 = (1, 3, 1, 3)$ ,  $a_4 = (1, 2, 0, 2)$ .

15. Найдите ортонормированную фундаментальную систему решений для системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 5x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

16. При каких значениях параметра  $\lambda$  векторы  $\alpha_1 = (0, 1, \lambda)$ ,  $\alpha_2 = (1, -1, 1)$ ,  $\alpha_3 = (-2, -1, \lambda)$  составляют ортогональный базис пространства  $\mathbb{R}^3$ .

17. В евклидовом пространстве  $F_3$  многочленов степени  $\leq 2$  над  $\mathbb{R}$  со скалярным произведением, задаваемым формулой  $(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x) dx$ , ортогонализируйте систему векторов

$$f_1(x) = 2, \quad f_2(x) = -x, \quad f_3(x) = 6x^2.$$

18. Покажите, что в евклидовом пространстве  $F_3$  многочленов степени  $\leq 2$  над  $\mathbb{R}$  со скалярным произведением, задаваемым формулой  $(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x) dx$ , векторы  $f_1(x) = 1$ ,  $f_2(x) = \sqrt{3}(2x-1)$ ,  $f_3(x) = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)$  составляют ортонормированный базис. Найдите координаты  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  и  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  многочленов  $\varphi_1(x) = 1 + 2x$ ,  $\varphi_2(x) = 1 - 5x + 6x^2$  в этом базисе и вычислите их скалярное произведение двумя способами:

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_0^1 \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot dx, \quad (\varphi_1, \varphi_2) = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3.$$

19. В пространстве  $\mathbb{C}$  комплексных чисел над полем  $\mathbb{R}$  скалярное произведение любых двух векторов  $z_1 = a_1 + b_1 i$ ,  $z_2 = a_2 + b_2 i$  определяется по формуле

$$(z_1, z_2) = a_1 a_2 + b_1 b_2.$$

Ортогонализируйте систему векторов  $u_1 = -3 + 4i$ ,  $u_2 = 2 + 3i$ .

### § 3. ОРТОГОНАЛЬНОЕ ДОПОЛНЕНИЕ К ПОДПРОСТРАНСТВУ. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

#### Примеры

В нижеприводимых примерах запись

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

будет означать, что числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  являются координатами вектора  $x$  в некотором фиксированном ортонормированном базисе.

1. В евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^4$  подпространство  $L$  задано системой уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Найдем по одному ортогональному базису в пространствах  $L$ , его ортогональном дополнении  $L^\perp$  и  $\mathbb{R}^4$ .

Решение. Решая систему (1) уравнений методом Гаусса, получим:

$$\begin{cases} x_2 + 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 - 6x_3 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Придавая свободным неизвестным  $x_3, x_4$  поочередно значения 1, 0 и 0, 1, найдем фундаментальный набор решений данной системы (базис  $L$ ):

$$a_1 = (-6, 9, 1, 0), \quad a_2 = (0, 1, 0, 1).$$

Ортогонализируем систему векторов  $a_1, a_2$ :

$$b_1 = a_1 = (-6, 9, 1, 0),$$

$$b_2 = a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 = a_2 - \frac{9}{118} b_1 = \frac{1}{118} (54, 37, -9, 118).$$

Итак,  $b_1, b_2$ —один из ортогональных базисов подпространства  $L$ .

Найдем теперь базис  $L^\perp$ . Как известно (см. «Алгебра», с. 118), если  $L$  есть подпространство решений системы (2), то  $L^\perp$ —линейная оболочка векторов

$$c_1 = (2, 1, 3, -1), \quad c_2 = (-1, 0, -6, 0),$$

являющихся строчками коэффициентов системы (2). А так как векторы  $c_1, c_2$  линейно независимы, то они составляют базис пространства  $L^\perp$ . Ортогонализируя этот базис, получаем:

$$d_1 = c_1 = (2, 1, 3, -1),$$

$$d_2 = c_2 - \frac{(c_2, c_1)}{(c_1, c_1)} c_1 = c_2 + \frac{20}{15} c_1 = \frac{1}{3} (5, 4, -6, -4).$$

Таким образом, мы нашли ортогональный базис  $d_1, d_2$  пространства  $L^\perp$ .

Нетрудно доказать, что система  $b_1, b_2, d_1, d_2$  также будет ортогональной, а потому линейно независимой. Следовательно, эта система является ортогональным базисом пространства  $R^4$ .

2. Найдем в пространстве  $R^4$  ортогональную проекцию  $a$  и ортогональную составляющую  $b$  вектора  $v = (-4, -1, -3, 4)$  относительно подпространства  $L$ , порожденного векторами  $a_1 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $a_2 = (1, 2, 2, -1)$ ,  $a_3 = (1, 0, 0, 3)$ .

Решение. Находим базис  $L$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, искомый базис состоит из векторов  $a_1, a_2$ . Ортогонализируем этот базис:

$$b_1 = a_1 = (1, 1, 1, 1),$$

$$b_2 = a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 = a_2 - \frac{4}{4} b_1 = a_2 - b_1 = (0, 1, 1, -2).$$

Находим ортогональную проекцию  $a$  данного вектора  $v$  на  $L$ :

$$a = \text{пр}_L v = \frac{(v, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 + \frac{(v, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2 = \frac{4}{4} b_1 + \frac{-12}{6} b_2 = (1, -1, -1, 5)$$

и ортогональную составляющую  $b$  вектора  $v$  относительно  $L$ :

$$b = v - a = (3, 0, -2, -1).$$

Поскольку вектор  $b$  принадлежит подпространству  $L^\perp$ , то он должен быть ортогонален каждому из векторов  $a_1, a_2$ . Проверка дает:

$$\begin{aligned}(b, a_1) &= 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0, \\(b, a_2) &= 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) = 0.\end{aligned}$$

3. Расстоянием от точки, заданной вектором  $c \in E^n$ , до линейного многообразия  $M = a_0 + L$  называется минимум расстояний от данной точки до точек многообразия, т. е. минимум длин векторов  $c - x$ , где  $x$  — произвольный вектор из  $M$ .

а) Докажем, что расстояние от  $c$  до  $M$  равно длине ортогональной составляющей вектора  $c - a_0$  относительно подпространства  $L$ .

б) Найдем указанное расстояние для случая, когда  $c = (4, -1, 3, 7)$ , а линейное многообразие задано системой уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_4 = -3, \\ x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение. а) Представим вектор  $c - a_0$  в виде

$$c - a_0 = b + (a + a_0 - x),$$

где  $a \in L$ ,  $b \in L^\perp$ . Тогда для произвольного вектора  $x \in M$  будем иметь:

$$c - x = b + (a + a_0 - x).$$

Но так как  $x \in M$ , то  $a_0 - x \in L$ , и, значит,  $a + a_0 - x \in L$ .

Поэтому  $(b, a + a_0 - x) = 0$  и

$$\begin{aligned}|c - x|^2 &= (c - x, c - x) = (b, b) + (a + a_0 - x, a + a_0 - x) = \\ &= |b|^2 + |a + a_0 - x|^2 \geq |b|^2,\end{aligned}$$

откуда следует, что при  $x = a + a_0$  вектор  $c - x$  будет иметь наименьшую возможную длину, равную  $|b|$ , что и требовалось доказать.

б) Решая данную систему методом Гаусса, получим:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$$

Придав свободным неизвестным  $x_3, x_4$  нулевые значения  $x_3 = x_4 = 0$ , найдем, что одним из частных решений будет вектор  $a_0 = (-3, 3, 0, 0)$ , который можно считать вектором сдвига в данном линейном многообразии. Для отыскания базиса направляющего подпространства  $L$  построим фундаментальный набор решений однородной системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Полагая  $x_3 = 2, x_4 = 0$  и  $x_3 = 0, x_4 = 2$ , получаем искомый набор (базис  $L$ ):

$$a_1 = (2, -3, 2, 0), \quad a_2 = (-2, 1, 0, 2).$$

Методом ортогонализации по найденному базису строим ортогональный базис  $L$ :

$$b_1 = a_1 = (2, -3, 2, 0), \quad b_2 = (-10, -2, 7, 17).$$

По вектору сдвига  $\mathbf{a}_0$  и заданному вектору  $\mathbf{c}$  составляем вектор

$$\mathbf{c} - \mathbf{a}_0 = (4, -1, 3, 7) - (-3, 3, 0, 0) = (7, -4, 3, 7)$$

и находим его ортогональную проекцию  $\mathbf{a}$  на  $L$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{a} = \text{пр}_L(\mathbf{c} - \mathbf{a}_0) &= \frac{(\mathbf{c} - \mathbf{a}_0, \mathbf{b}_1)}{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1)} \mathbf{b}_1 + \frac{(\mathbf{c} - \mathbf{a}_0, \mathbf{b}_2)}{(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2)} \mathbf{b}_2 = \\ &= \frac{32}{17} \mathbf{b}_1 + \frac{3}{17} \mathbf{b}_2 = (2, -6, 5, 3).\end{aligned}$$

Находим теперь ортогональную составляющую  $\mathbf{b}$  вектора  $\mathbf{c} - \mathbf{a}_0$  относительно  $L$  и вычисляем ее длину:

$$\begin{aligned}\mathbf{b} &= (\mathbf{c} - \mathbf{a}_0) - \mathbf{a} = (5, 2, -2, 4), \\ |\mathbf{b}| &= \sqrt{25 + 4 + 4 + 16} = \sqrt{49} = 7.\end{aligned}$$

Таким образом, расстояние от точки, заданной вектором  $\mathbf{c}$  до данного многообразия, равно 7.

#### Упражнения для самостоятельного решения

4. Докажите, что если  $L$  — ненулевое подпространство евклидова пространства  $E^n$ ,  $L^\perp$  — ортогональное дополнение подпространства  $L$ ,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s$  — ортогональный базис подпространства  $L$ , а  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{n-s}$  — ортогональный базис подпространства  $L^\perp$ , то система  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_s, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{n-s}$  является ортогональным базисом пространства  $E^n$ .

5. Докажите, что если  $L_1$  и  $L_2$  — подпространства евклидова пространства  $E^n$ , причем  $L_1 + L_2 \neq E^n$ , то в  $E^n$  существует ненулевой вектор, ортогональный к подпространствам  $L_1$  и  $L_2$ .

6. В евклидовом пространстве  $\mathbf{R}^3$  подпространство  $L$  задано системой уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Найдите по одному ортогональному базису в каждом из пространств  $L, L^\perp, \mathbf{R}^3$ .

7. В пространстве  $\mathbf{R}^5$  найдите базис  $L^\perp$ , если  $L$  является подпространством, натянутым на следующую систему векторов:

- а)  $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 0, 3, -1), \quad \mathbf{a}_2 = (1, -1, 1, 0, -2),$   
 $\mathbf{a}_3 = (2, 1, 1, 3, -5);$   
 б)  $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1, 2, -1), \quad \mathbf{a}_2 = (1, -1, -2, 0, 2),$   
 $\mathbf{a}_3 = (2, 0, -1, 2, 2).$

8. Найдите ортогональную проекцию  $\mathbf{a}$  и ортогональную составляющую  $\mathbf{b}$  вектора  $\mathbf{v}$  относительно подпространства  $L$ , порожденного векторами  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ , если:

- а)  $\mathbf{a}_1 = (2, 1, -4), \quad \mathbf{a}_2 = (3, 5, -7), \quad \mathbf{a}_3 = (4, -5, -6),$   
 $\mathbf{v} = (-12, 9, -12);$

б)  $a_1 = (2, -4, 5, 3)$ ,  $a_2 = (3, -6, 4, 2)$ ,  $a_3 = (4, -8, 17, 11)$ ,  
 $v = (3, -5, 2, -10)$ .

9. Найдите ортогональную проекцию  $a$  и ортогональную составляющую  $b$  вектора  $v = (5, 2, -2, 2)$  относительно подпространства  $L$ , заданного системой уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$$

10. Найдите расстояние от точки, заданной вектором  $c$ , до линейного многообразия, заданного системой уравнений:

$$\begin{aligned} \text{а) } c = (1, 2, -1, 1), \quad \text{б) } c = (2, 4, -4, 2), \\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6, \\ 3x_1 - 5x_3 + x_4 = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

11. Докажите, что среди всех векторов данного линейного подпространства  $L$  наименьший угол с данным вектором  $v \in E^n$  образует ортогональная проекция  $a$  вектора  $v$  на  $L$ .

У к а з а н и е. Поскольку  $v = a + b$ , где  $b \in L^\perp$ , то  $(v, a) = |a|^2$  и  $(v, x) = (a, x)$  для любого  $x \in L$ . Получите отсюда, что

$$\cos(\widehat{v, x}) = \cos(\widehat{v, a}) \cdot \cos(\widehat{a, x}) \leq \cos(\widehat{v, a}).$$

12. Найдите наименьший угол (см. упр. 11) между вектором  $v \in \mathbb{R}^4$  и линейным подпространством  $L$ , натянутым на векторы  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , если:

$$\begin{aligned} \text{а) } v = (2, 2, 1, 1), \quad a_1 = (3, 4, -4, -1), \\ a_2 = (0, 1, -1, 2); \\ \text{б) } v = (1, 0, 3, 0), \quad a_1 = (5, 3, 4, -3), \\ a_2 = (1, 1, 4, 5), \\ a_3 = (2, -1, 1, 2). \end{aligned}$$

В последующих примерах под пространством  $\mathbb{C}$  понимается евклидово пространство комплексных чисел над полем  $\mathbb{R}$ , в котором скалярное произведение любых двух векторов  $z_1 = a_1 + b_1 i$ ,  $z_2 = a_2 + b_2 i$  определяется по формуле

$$(z_1, z_2) = a_1 a_2 + b_1 b_2.$$

13. Найдите в пространстве  $\mathbb{C}$  ортогональную проекцию  $a$  и ортогональную составляющую  $b$  вектора  $z = 3 + 4i$  относительно подпространства  $L$ , порожденного вектором  $z_0 = 2 + i$ .

14. Найдите в пространстве  $\mathbb{C}$  расстояние от точки  $z = 4 + 12i$  до многообразия  $M = z_0 + L$ , где  $z_0 = 3 + 4i$ , а  $L$  порождается вектором  $2 + i$ .

15. Найдите в пространстве  $\mathbb{C}$  наименьший угол (см. упр. 11) между вектором  $z = 1 + i\sqrt{3}$  и подпространством  $L$ , порожденным вектором  $\sqrt{3} + i$ .

## Глава IV. ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

### § 1. ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ИХ МАТРИЦЫ. СУММА И ПРОИЗВЕДЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

#### Примеры

1. Выясним, будет ли отображение  $\varphi$  линейного вещественного пространства в себя линейным, если:

- а)  $\varphi(x) = 2x$  для всякого вектора  $x \in L$ ;  
б) для всякого вектора  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  его образ  $\varphi(x) = (x_1 + k, x_2 + k, x_3 - k)$ , где  $k \in \mathbb{R}$  — фиксированное число.

**Решение.** Отображение  $\varphi$  является линейным, если выполняются следующие два требования:

- 1)  $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ ;    2)  $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$ .

Проверим, выполняются ли эти требования для заданных отображений.

- а) По условию для любых векторов  $x, y \in L$  и любого  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\varphi(x + y) &= 2(x + y) = 2x + 2y = \varphi(x) + \varphi(y), \\ \varphi(\lambda x) &= 2(\lambda x) = \lambda(2x) = \lambda \varphi(x).\end{aligned}$$

Таким образом, в случае а) требования 1), 2) выполнены, и поэтому отображение  $\varphi$  является линейным.

- б) Если  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , то  $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ . По условию имеем:

$$\begin{aligned}\lambda \varphi(x) &= \lambda(x_1 + k, x_2 + k, x_3 - k) = \\ &= (\lambda x_1 + \lambda k, \lambda x_2 + \lambda k, \lambda x_3 - \lambda k),\end{aligned}$$

$$\varphi(\lambda x) = (\lambda x_1 + k, \lambda x_2 + k, \lambda x_3 - k),$$

т. е.  $\varphi(\lambda x) \neq \lambda \varphi(x)$  при  $\lambda \neq 1$  и  $k \neq 0$ .

Уже отсюда следует, что если  $k \neq 0$ , то  $\varphi$  не является линейным отображением пространства  $\mathbb{R}^3$ . При  $k = 0$

$$\varphi(x) = (x_1 + 0, x_2 + 0, x_3 - 0) = (x_1, x_2, x_3) = x,$$

т. е. в этом случае отображение  $\varphi$  будет тождественным, а потому линейным.

2. Докажем, что существует, и притом только одно, линейное отображение  $n$ -мерного линейного пространства  $L$ , переводящее данные линейно независимые векторы  $a_1, a_2, \dots, a_n \in L$  соответственно в данные векторы  $b_1, b_2, \dots, b_n \in L$ .

**Решение.** По условию система  $n$  векторов  $a_1, a_2, \dots, a_n$  линейно независима, а потому она является базисом  $n$ -мерного пространства  $L$  и любой вектор  $x \in L$  можно единственным образом разложить по векторам этого базиса:

$$x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n.$$

Определим отображение  $\varphi$  следующим образом:

$$\varphi(x) = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n. \quad (1)$$

Так как  $a_1 = 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \dots + 0 \cdot a_n$ , то, в частности, согласно (1) получим:

$$\varphi(a_1) = 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + \dots + 0 \cdot b_n = b_1;$$

аналогично  $\varphi(a_2) = b_2, \dots, \varphi(a_n) = b_n$ . Таким образом,  $\varphi$  переводит данные векторы  $a_1, a_2, \dots, a_n$  соответственно в векторы  $b_1, b_2, \dots, b_n$ .

Докажем, что найденное отображение  $\varphi$  является линейным. Так как  $\lambda x = \lambda x_1 a_1 + \lambda x_2 a_2 + \dots + \lambda x_n a_n$ , то согласно (1) получаем:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda x) &= \lambda x_1 b_1 + \lambda x_2 b_2 + \dots + \lambda x_n b_n = \\ &= \lambda (x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n) = \lambda \varphi(x). \end{aligned} \quad (2).$$

Кроме того, если  $y$  — любой другой вектор из  $L$ ,

$$y = y_1 a_1 + y_2 a_2 + \dots + y_n a_n,$$

то

$$x + y = (x_1 + y_1) a_1 + (x_2 + y_2) a_2 + \dots + (x_n + y_n) a_n$$

и по формуле (1) имеем:

$$\begin{aligned} \varphi(x + y) &= (x_1 + y_1) b_1 + (x_2 + y_2) b_2 + \dots + (x_n + y_n) b_n = \\ &= (x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n) + (y_1 b_1 + y_2 b_2 + \dots + y_n b_n) = \\ &= \varphi(x) + \varphi(y). \end{aligned} \quad (3)$$

Из результатов (2) и (3) следует, что отображение  $\varphi$  — линейное.

Допустим теперь, что некоторое линейное отображение  $\psi$  пространства  $L$  в себя также переводит векторы  $a_1, a_2, \dots, a_n$  соответственно в  $b_1, b_2, \dots, b_n$ :  $\psi(a_1) = b_1, \psi(a_2) = b_2, \dots, \psi(a_n) = b_n$ .

Тогда для любого вектора  $x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n \in L$  ввиду линейности  $\psi$  будем иметь:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi(x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n) = \\ &= x_1 \psi(a_1) + x_2 \psi(a_2) + \dots + x_n \psi(a_n) = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n, \end{aligned}$$

а это означает, что отображение  $\psi$  совпадает с отображением  $\varphi$ .

3. Известно, что

$$\begin{aligned} a_1 &= (0, 0, 1), & a_2 &= (0, 1, 1), & a_3 &= (1, 1, 1); \\ b_1 &= (2, 3, 5), & b_2 &= (1, 0, 0), & b_3 &= (0, 1, -1) \end{aligned}$$

векторы линейного пространства  $L$ , заданные своими координатами в некотором базисе  $e_1, e_2, e_3$ . В том же базисе найдите матрицу линейного отображения  $\varphi$ , переводящего векторы  $a_1, a_2, a_3$  соответственно в векторы  $b_1, b_2, b_3$ .

**Решение.** Система векторов  $a_1, a_2, a_3$  — лестничная, а потому линейно независимая, следовательно (см. предыдущий пример 2), требуемое отображение  $\varphi$  существует и единственно. Для нахождения матрицы отображения  $\varphi$  в базисе  $e_1, e_2, e_3$  нужно об-



разы базисных векторов  $\varphi(e_1)$ ,  $\varphi(e_2)$ ,  $\varphi(e_3)$  линейно выразить через векторы базиса  $e_1, e_2, e_3$ .

Выразим сначала векторы  $e_1, e_2, e_3$  через векторы  $a_1, a_2, a_3$ . По условию

$$\begin{aligned} a_1 &= e_3, \\ a_2 &= e_2 + e_3, \\ a_3 &= e_1 + e_2 + e_3, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} e_1 &= -a_2 + a_3, \\ e_2 &= -a_1 + a_2, \\ e_3 &= a_1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi(e_1) &= -\varphi(a_2) + \varphi(a_3) = -b_2 + b_3 = -e_1 + (e_2 - e_3) = \\ &= -e_1 + e_2 - e_3, \\ \varphi(e_2) &= -\varphi(a_1) + \varphi(a_2) = -b_1 + b_2 = -(2e_1 + 3e_2 + 5e_3) + e_1 = \\ &= -e_1 + 3e_2 - 5e_3, \\ \varphi(e_3) &= \varphi(a_1) = b_1 = 2e_1 + 3e_2 + 5e_3. \end{aligned}$$

Записывая последние три равенства в матричной форме, получаем:

$$(\varphi(e_1) \ \varphi(e_2) \ \varphi(e_3)) = (e_1 \ e_2 \ e_3) \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

будет искомой матрицей отображения  $\varphi$  в базисе  $e_1, e_2, e_3$ .

Результат можно проверить, пользуясь тем, что координатные столбцы  $X$  и  $Y$  любого вектора  $x$  и его образа  $y = \varphi(x)$  связаны равенством

$$Y = AX.$$

Например, для векторов  $a_1$  и  $b_1 = \varphi(a_1)$  имеем верное равенство

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Линейное отображение  $\varphi$  линейного пространства  $\mathbf{R}^3$  имеет в базисе  $e_1 = (8, -6, 7)$ ,  $e_2 = (-16, 7, -13)$ ,  $e_3 = (9, -3, 7)$  матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу  $B$  того же отображения в базисе

$$e'_1 = (1, -2, 1), \quad e'_2 = (3, -1, 2), \quad e'_3 = (2, 1, 2).$$

**Решение.** Сначала находим матрицу перехода от базиса  $e_1, e_2, e_3$  к базису  $e'_1, e'_2, e'_3$ . Имеем по определению:

$$(e'_1, e'_2, e'_3) = (e_1, e_2, e_3) T,$$

что равносильно матричному равенству

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -16 & 9 \\ -6 & 7 & -3 \\ 7 & -13 & 7 \end{pmatrix} T.$$

Выражая отсюда  $T$ , получим:

$$T = \begin{pmatrix} 8 & -16 & 9 \\ -6 & 7 & -3 \\ 7 & -13 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную к  $T$  матрицу:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицу  $B$  данного отображения в базисе  $e'_1, e'_2, e'_3$  находим по известной формуле (см. «Алгебра», с. 132):

$$B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Линейное отображение  $\varphi$  пространства  $R^2$  в базисе  $a_1 = (2, 1)$ ,  $a_2 = (1, 1)$  имеет матрицу

$$A_a = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix},$$

а линейное отображение  $\psi$  пространства  $R^2$  в базисе  $b_1 = (5, 2)$ ,  $b_2 = (1, 0)$  имеет матрицу

$$B_b = \begin{pmatrix} 7,5 & 3,5 \\ 4,5 & 1,5 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицы отображений  $\varphi + \psi$  и  $\varphi \cdot \psi$  в базисе  $b_1, b_2$ .

**Решение.** Задача сводится к нахождению матрицы  $A_b$  линейного отображения  $\varphi$  в базисе  $b_1, b_2$  по формуле  $A_b = T^{-1}A_aT$ , где матрица  $T$  есть матрица перехода от базиса  $a_1, a_2$  к базису  $b_1, b_2$ .

Для нахождения  $T$  выразим векторы  $b_1, b_2$  через  $a_1, a_2$ . Имеем последовательно:

$$b_1 = (5, 2) = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = (2\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2),$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 5, \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 2, \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1, \quad b_1 = 3a_1 - a_2.$$

Аналогично получаем  $b_2 = a_1 - a_2$ . Отсюда

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix},$$

$$A_b = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -13 & 5 \end{pmatrix}$$

Известно, что матрица суммы (произведения) двух линейных отображений в некотором базисе является суммой (произведением) в обратном порядке матриц этих отображений в том же базисе. Поэтому матрицей линейного отображения  $\varphi + \psi$  в базисе  $b_1, b_2$  будет матрица

$$A_b + B_b = \begin{pmatrix} 3,5 & -1,5 \\ -6,5 & 2,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7,5 & 3,5 \\ 4,5 & 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},$$

а матрицей линейного отображения  $\varphi \cdot \psi$  в базисе  $b_1, b_2$  — матрица

$$B_b A_b = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 15 & 7 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -13 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

#### Упражнения для самостоятельного решения

6. Выясните, будет ли линейным отображение  $\varphi$  пространства  $\mathbb{R}^3$  в себя, если для любого вектора  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ :

а)  $\varphi(x) = (x_1 + 3, x_2, x_3)$ ; б)  $\varphi(x) = (x_1 - x_2 + x_3, x_3, x_2)$ .

7. Покажите, что отображение  $\varphi$  пространства вещественных функций, определенных и непрерывных на отрезке  $[a, b]$ , ставящее в соответствии каждой функции  $f(x)$  из этого пространства функцию  $\int_a^x f(x) dx$ , является линейным.

8. а) Покажите, что в трехмерном пространстве  $V_3$  геометрических векторов, исходящих из начала координат  $O$ , ортогональное проектирование  $\varphi$  на некоторую плоскость, проходящую через точку  $O$ , является линейным отображением пространства в себя.

б) Пусть  $\varphi$  — ортогональное проектирование пространства  $V_3$  на плоскость  $xOy$  прямоугольной системы координат, а  $e_1, e_2, e_3$  — векторы, направленные по осям координат. Найдите матрицу  $\varphi$  в базисе  $e_1, e_2, e_3$  и в базисе  $e'_1 = e_1, e'_2 = e_2, e'_3 = e_1 + e_2 + e_3$ , а также образ вектора  $x = 1 \cdot e_1 + 2e_2 + 2e_3$  двумя способами: 1) исходя непосредственно из определения  $\varphi$ ; 2) по формуле  $Y = A \cdot X$ , где  $A$  — матрица  $\varphi$  в каком-либо базисе, а  $X$  и  $Y$  — столбцы координат векторов  $x$  и  $y = \varphi(x)$  в том же базисе.

9. Пусть  $\varphi$  — ортогональное проектирование трехмерного пространства  $V_3$  на ось, образующую равные углы с осями прямоугольной системы координат, а  $e_1, e_2, e_3$  — единичные векторы, направленные по осям координат. Найдите матрицу линейного отображения  $\varphi$  в базисе  $e_1, e_2, e_3$ .

10. Докажите, что если  $e_1, e_2, e_3$  — векторы, направленные по осям пространственной системы координат, то проектирование трехмерного пространства на координатную ось вектора  $e_1$  параллельно координатной плоскости векторов  $e_2$  и  $e_3$  является линейным отображением. Найдите его матрицу в базисе  $e_1, e_2, e_3$ .

11. Покажите, что отображение  $\varphi$  пространства  $\mathbf{R}^3$  в себя, переводящее любой вектор  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  в вектор  $\varphi(\mathbf{x}) = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$ , является линейным. Найдите его матрицу в базисе

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1).$$

12. Пусть  $\mathbf{a}_1 = (2, 0, 3)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (4, 1, 5)$ ,  $\mathbf{a}_3 = (3, 1, 2)$ ,  $\mathbf{b}_1 = (1, 2, -1)$ ,  $\mathbf{b}_2 = (4, 5, -2)$ ,  $\mathbf{b}_3 = (1, -1, 1)$  — векторы линейного пространства  $L$ , заданные своими координатами в некотором базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Определите, существует ли линейное отображение, переводящее векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  соответственно в векторы  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ , и если существует, то найдите его матрицу в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ .

13. Докажите, что если линейное отображение  $\varphi$  пространства  $\mathbf{R}^n$  переводит линейно независимые векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  соответственно в векторы  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ , то матрица  $\mathbf{A}_\varphi$  этого отображения в некотором базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  равна  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}$ , где столбцы матриц  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{A}$  состоят соответственно из координат векторов  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$  и  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  в базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ .

14. Линейное отображение пространства  $\mathbf{R}^4$  переводит векторы  $\mathbf{a}_1 = (0, 1, -1, 2)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (1, 2, -3, 1)$ ,  $\mathbf{a}_3 = (0, 0, 0, 1)$ ,  $\mathbf{a}_4 = (-2, 0, 1, -1)$  соответственно в векторы  $\mathbf{b}_1 = (7, 6, -11, -10)$ ,  $\mathbf{b}_2 = (0, 7, -8, 1)$ ,  $\mathbf{b}_3 = (4, 2, -3, -6)$ ,  $\mathbf{b}_4 = (-1, 3, -3, 9)$ . Найдите матрицу этого отображения в базисе  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ .

15. Докажите, что если  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  — некоторая матрица из линейного пространства  $M_2$  квадратных матриц порядка 2 над полем  $P$ , то отображения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  пространства  $M_2$ , определяемые формулами  $\varphi_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  и  $\varphi_2(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A}$ , являются линейными. Найдите матрицы этих отображений в базисе

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Докажите, что если  $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$  — вектор из евклидова пространства  $\mathbf{R}^3$  над полем  $\mathbf{R}$  и для любого  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$   $\varphi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} = (x_1 + 2x_2 + 3x_3) \cdot \mathbf{a}$ , то отображение  $\varphi$  является линейным. Найдите его матрицу:

а) в базисе  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ ;

б) в базисе  $\mathbf{b}_1 = (1, 0, 1)$ ,  $\mathbf{b}_2 = (2, 0, -1)$ ,  $\mathbf{b}_3 = (1, 1, 0)$ .

17. Линейное отображение  $\varphi$  пространства  $L$  задано в некотором базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Покажите, что система векторов  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ ,  $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$ ,

$a_3 = 2e_2 + e_3$  составляет базис пространства  $L$ , и найдите матрицу  $B$  отображения  $\varphi$  в этом базисе.

18. Линейное отображение  $\varphi$  в некотором базисе  $e_1, e_2, e_3, e_4$  имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу этого отображения в базисе:

а)  $e_2, e_1, e_3, e_4$ ;

б)  $a_1 = e_1, a_2 = e_1 + e_2, a_3 = e_2 + e_3, a_4 = e_3 + e_4$ ;

в)  $b_1 = e_1, b_2 = 3e_1 + e_2, b_3 = -5e_1 + 2e_2 + e_3,$

$b_4 = 7e_1 - 3e_2 + 2e_3 + e_4$ .

19. Линейное отображение  $\varphi$  пространства  $R^3$  в базисе  $a_1 = (0, 0, 1), a_2 = (0, 1, 1), a_3 = (1, 1, 1)$  имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу  $B$  того же отображения в базисе

$$b_1 = (2, 3, 5), \quad b_2 = (0, 1, 2), \quad b_3 = (1, 0, 0).$$

20. Линейное отображение  $\varphi$  пространства  $R^2$  в базисе  $a_1 = (1, 2), a_2 = (2, 3)$  имеет матрицу  $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ , а линейное отображение  $\psi$  в базисе  $b_1 = (3, 1), b_2 = (4, 2)$  имеет матрицу  $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ . Найдите матрицу линейного отображения  $\varphi + \psi$  в базисе  $b_1, b_2$ .

21. Линейное отображение  $\varphi$  в базисе  $a_1 = (-3, 7), a_2 = (1, -2)$  имеет матрицу  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ , а линейное отображение  $\psi$  в базисе  $b_1 = (6, -7), b_2 = (-5, 6)$  имеет матрицу  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ . Найдите матрицу отображения  $\psi \circ \varphi$  в том базисе, в котором даны координаты векторов  $a_1, a_2, b_1, b_2$ .

22. Пусть  $\varphi$  — линейное отображение в себя пространства  $F_4$  многочленов степени  $\leq 3$  над  $R$ , переводящее каждый многочлен в его производную. Найдите матрицу этого отображения в базисе  $e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2, e_4 = x^3$  и покажите, что отображение  $\varphi^4$  в том же базисе имеет нулевую матрицу.

## § 2. ЯДРО И ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

### Примеры

1. Линейное отображение  $\varphi$  пространства  $L$  задано матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

в некотором базисе  $e_1, e_2, e_3, e_4$ . Найдем ядро и дефект отображения  $\varphi$ .

**Решение.** По определению ядро отображения  $\varphi$ , или  $\ker \varphi$ , есть множество всех тех векторов  $x$ , которые отображение  $\varphi$  переводит в нулевой вектор:  $\varphi(x) = 0$ . Это означает, что  $\ker \varphi$  состоит в точности из тех же векторов  $x$ , координаты которых  $x_1, x_2, x_3, x_4$  (в базисе  $e_1, e_2, e_3, e_4$ ) удовлетворяют условию:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

т. е.  $\ker \varphi$  соответствует пространству  $L_1$  решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Для матрицы  $A$  системы имеем:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

откуда следует, что ранг  $r$  матрицы  $A$  равен 2 и  $\dim L_1 = n - r = 4 - 2 = 2$ .

Таким образом, дефект отображения  $\varphi$  равен 2.

2. а) Найдем ядро, ранг и область значений линейного отображения  $\varphi$  пространства  $M_2$  вещественных матриц порядка 2 над полем  $\mathbb{R}$ , если  $\varphi$  задано матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 13 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

в базисе

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

б) Выясним, принадлежит ли вектор

$$y = \begin{pmatrix} -22 & -4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \text{ из } M_2 \text{ подпространству } \ker \varphi.$$

**Решение.** а) По определению область значений линейного отображения  $\varphi$  пространства  $M_2$  является образ  $\varphi(M_2)$  этого пространства при его линейном отображении  $\varphi$ . Этим образом будет подпространство, натянутое на векторы  $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4)$ , координатные столбцы которых являются столбцами матрицы  $A$ . Имеем:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -7 & -1 \\ 0 & -10 & -14 & -2 \end{pmatrix}' \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & -1 \end{pmatrix},$$

откуда ранг  $r$  матрицы  $A$ , а значит, и ранг отображения  $\varphi$  равен 2.

Следовательно, базис подпространства  $\varphi(M_2)$  состоит из двух векторов. Если учесть при этом, что первые два столбца матрицы непропорциональны, то за базис подпространства  $\varphi(M_2)$  можно принять, например, векторы

$$\varphi(e_1) = e_1 + 2e_2 + 4e_3 + 3e_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$$

и

$$\varphi(e_2) = 3e_1 + e_2 + 7e_3 - e_4 = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\varphi(M_2) = \{x \mid x = \lambda_1 \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Ядро отображения  $\varphi$  соответствует (см. пример 1) пространству решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 0, \\ -5x_2 - 7x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Находим фундаментальный набор решений данной системы и соответствующие векторы ядра:

$$a_1 = (-4, -7, 5, 0), a'_1 = -4e_1 - 7e_2 + 5e_3 = \begin{pmatrix} -11 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$a_2 = (-2, -1, 0, 5), a'_2 = -2e_1 - e_2 + 5e_4 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\ker \varphi = \{x \mid x = \lambda_1 \begin{pmatrix} -11 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.$$

б) Вектор  $y = \begin{pmatrix} -22 & -4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \in \ker \varphi$  тогда и только тогда, когда найдутся такие  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , что

$$\begin{pmatrix} -22 & -4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -11 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11\lambda_1 - 3\lambda_2 & -2\lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 & 5\lambda_1 + 5\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда имеем систему

$$\begin{cases} -11\lambda_1 - 3\lambda_2 = -22, \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 = -4, \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = 2, \\ 5\lambda_1 + 5\lambda_2 = 10, \end{cases}$$

решая которую получаем  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$ . Следовательно,

$$y \in \ker \varphi.$$

3. Линейное отображение  $\varphi$  пространства  $M_2$  квадратных матриц порядка 2 над полем  $\mathbf{R}$  задано в базисе

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 13 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем для вектора  $x_0 = -e_1 + 2e_2 + 4e_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  его образ  $y_0 = \varphi(x_0)$  и полный прообраз вектора  $y_0$ .

Решение. Для координат  $y_1, y_2, y_3, y_4$  вектора  $y_0$  имеем:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 13 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 22 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\varphi(x_0) = y_0 = 9e_1 + 4e_2 + 22e_3 - e_4 = \begin{pmatrix} 13 & 26 \\ 30 & 21 \end{pmatrix}.$$

Так как координаты  $x_1, x_2, x_3, x_4$  любого прообраза вектора  $y_0$  удовлетворяют уравнению

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 13 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 22 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

то полному прообразу  $y_0$  соответствует многообразие решений неоднородной системы уравнений, эквивалентной уравнению (1).

Координатный столбец вектора  $x_0$  является частным решением этой системы, а общее решение соответствующей однородной системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 13 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

отвечает ядру отображения  $\varphi$ . Если воспользоваться найденным в предыдущем примере 2 базисом ядра  $\varphi$ , то полный прообраз вектора  $y_0$  можно представить в виде

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \{x \mid x = \lambda_1 \begin{pmatrix} -11 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}\}.$$

4. Докажем, что линейное отображение  $\varphi$   $n$ -мерного линейного пространства  $L$  над полем  $P$  взаимно однозначно тогда и



только тогда, когда ядро отображения  $\varphi$  является нулевым подпространством.

**Решение.** Напомним, что отображение  $\varphi$  пространства  $L$  называется взаимно однозначным, если:

1)  $\varphi(L) = L$  и 2) из  $x \neq y$  следует  $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ .

а) Пусть  $\ker \varphi \neq \{0\}$ , тогда в подпространстве  $\ker \varphi$ , кроме нулевого вектора  $0$ , имеется хотя бы один ненулевой вектор  $a$ . По определению ядра  $\varphi(a) = 0$ ,  $\varphi(0) = 0$ , откуда  $\varphi(a) = \varphi(0)$ . Итак, требование 2) не выполняется, и поэтому  $\varphi$  не является взаимно однозначным отображением.

б) Пусть теперь  $\ker \varphi = \{0\}$ . Это означает, что если  $A$  — матрица  $\varphi$  в некотором базисе, то уравнение

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

имеет единственное (нулевое) решение. Поэтому  $|A| \neq 0$ . Но тогда для любого вектора  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in L$  уравнение

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

также имеет единственное решение. Отсюда сразу следует, что требования 1), 2) выполняются и отображение  $\varphi$  является взаимно однозначным.

#### Упражнения для самостоятельного решения

5. Найдите ядро и область значений линейного отображения  $\varphi$  пространства  $\mathbb{R}^3$ , если  $\varphi$  задано формулой  $\varphi(x) = 2x$ . Найдите матрицу этого отображения в каком-нибудь базисе  $e_1, e_2, e_3$  пространства  $\mathbb{R}^3$ . Покажите, что  $\varphi$  является изоморфным отображением пространства  $\mathbb{R}^3$  на себя.

6. Исходя из геометрических соображений, найдите ядро, дефект, область значений и ранг линейного отображения  $\varphi$ , о котором идет речь в упражнении 8 б) § 1. То же самое для отображения  $\varphi$ , о котором идет речь в упражнении 10 § 1.

7. Чему равен дефект  $d$  линейного отображения  $\varphi$  пространства  $\mathbb{R}^3$ , если  $\varphi$  в некотором базисе задано матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

Является ли  $\varphi$  взаимно однозначным отображением пространства  $\mathbb{R}^3$  на себя?

8. Линейное отображение  $\varphi$  пространства  $\mathbf{R}^3$  в базисе  $\mathbf{a}_1 = (0, 0, 1)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 1)$ ,  $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 1)$  задано матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

а) Существует ли для  $\varphi$  обратное отображение  $\varphi^{-1}$ ? Если существует, то какова его матрица в заданном базисе?

б) Найдите полный прообраз вектора  $\mathbf{y} = -\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_3$  при заданном отображении  $\varphi$ .

9. Докажите, что ядро линейного отображения  $\varphi$   $n$ -мерного линейного пространства  $L$  в себя является нулевым подпространством тогда и только тогда, когда в любом базисе матрица отображения является невырожденной.

10. Докажите, что линейное отображение  $n$ -мерного линейного пространства  $L$  в себя взаимно однозначно тогда и только тогда, когда при этом отображении любой базис пространства  $L$  переходит снова в базис.

11. Найдите матрицу, образ и ядро линейного отображения  $\varphi$  пространства  $\mathbf{R}^3$  в базисе  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ , если известно, что оно любой вектор  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  переводит в вектор:

а)  $\varphi(\mathbf{x}) = (x_1, -x_2, 2x_3)$ ;

б)  $\varphi(\mathbf{x}) = (x_1 - x_3, x_1 + x_2, 0)$ .

12. Найдите ядро, область значений, дефект и ранг линейного отображения, о котором идет речь в упражнении 9 § 1.

13. В пространстве  $\mathbf{R}^3$  задан некоторый базис  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ , а в пространстве  $M_2$  вещественных квадратных матриц 2-го порядка над полем  $\mathbf{R}$  заданы некоторый базис  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$  и вектор  $\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 + 4\mathbf{e}_4$ ;  $\varphi$  — отображение  $\mathbf{R}^3$  в  $M_2$ , такое, что для всякого вектора  $\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3$   $\varphi(\mathbf{x}) = x_1\mathbf{b}$ .

а) Докажите, что отображение  $\varphi$  линейно, и найдите его матрицу в заданных базисах.

б) Найдите базис ядра и базис области значений отображения  $\varphi$ .

14. Пусть линейное отображение  $\varphi$  пространства  $F_n$  многочленов степени  $\leq n-1$  над полем  $\mathbf{R}$  состоит в дифференцировании многочленов из  $F_n$ . Найдите образ и ядро отображения  $\varphi$ .

15. Линейное отображение  $\varphi$  пространства  $M_2$  квадратных матриц порядка 2 над полем  $\mathbf{R}$  каждую матрицу  $A \in M_2$  переводит в матрицу  $\varphi(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Найдите матрицу  $\varphi$  в базисе

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а также по одному базису для ядра и области значений  $\varphi$ .

16. Докажите, что если  $\varphi$  и  $\psi$  — линейные отображения пространства  $L$ , такие, что  $\ker \varphi = \ker \psi = \{0\}$ , то  $\ker(\varphi \cdot \psi) = \{0\}$ .

17. Докажите, что полный прообраз любого вектора  $\alpha$  при линейном отображении пространства  $\mathbb{R}^n$  является линейным многообразием в  $\mathbb{R}^n$ .

18. Линейное отображение  $\varphi$  пространства  $\mathbb{R}^4$  задано в некотором базисе  $e_1, e_2, e_3, e_4$  матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 7 \\ 4 & -3 & 11 & -2 \\ -5 & 3 & -13 & 1 \\ 7 & -2 & 16 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдите многообразие  $M$  пространства  $\mathbb{R}^4$ , которое служит полным прообразом вектора  $y = -3e_1 + 13e_2 - 14e_3 + 13e_4$ .

### § 3. ИНВАРИАНТНОЕ ПОДПРОСТРАНСТВО. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

#### Примеры

1. В пространстве  $\mathbb{R}^3$  линейное отображение  $\varphi$  переводит любой вектор  $t = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  в вектор  $\varphi(t) = (-x, y, z)$ . Дадим геометрическую интерпретацию заданного отображения и опишем все подпространства  $\mathbb{R}^3$ , инвариантные относительно отображения  $\varphi$ .

**Решение.** Выберем в трехмерном пространстве прямоугольную систему координат  $Oxyz$  и будем понимать каждый набор  $(x, y, z)$  из  $\mathbb{R}^3$  как вектор, ведущий из начала координат в точку с координатами  $x, y, z$ . Все одномерные и двумерные подпространства  $\mathbb{R}^3$  будут тогда центральными (т. е. проходящими через центр  $O$ ) прямыми и плоскостями, а отображение  $\varphi$  будет означать симметрию относительно плоскости  $yOz$ . Следовательно, векторы этой плоскости будут переходить в себя. Понятно также, что если центральная плоскость проходит через ось  $Ox$  (т. е. если она перпендикулярна плоскости  $yOz$ ), то любой вектор этой плоскости переходит в вектор этой же плоскости. Таким образом, все двумерные инвариантные подпространства  $\mathbb{R}^3$  — это плоскость  $yOz$  и все перпендикулярные ей центральные плоскости.

Рассуждая аналогично, получим, что все одномерные инвариантные подпространства — это все центральные прямые плоскости  $yOz$  и перпендикулярная этой плоскости центральная прямая  $Ox$ .

2. Пусть  $\varphi$  — линейное отображение  $n$ -мерного пространства  $L$  в себя,  $\alpha$  — любой ненулевой вектор из  $L$ , а  $L_1$  — подпространство  $L$ , порожденное векторами

$$\alpha, \varphi(\alpha), \varphi^2(\alpha), \dots, \varphi^{n-1}(\alpha), \quad (1)$$

где  $\varphi^2(\alpha) = \varphi(\varphi(\alpha))$ ,  $\varphi^3(\alpha) = \varphi(\varphi(\varphi(\alpha)))$  и т. д.

а) Показать, что  $L_1$  — инвариантное подпространство относительно  $\varphi$ .

б) Найти базис  $L_1$ , если  $L$  есть пространство  $M_2$  вещественных квадратных матриц порядка 2 над полем  $\mathbb{R}$ ,  $\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , а отображение  $\varphi$  задано в базисе

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** а) Покажем сначала, что вектор  $\varphi^n(a)$  линейно выражается через векторы системы (1). Система

$$a, \varphi(a), \dots, \varphi^{n-1}(a), \varphi^n(a) \quad (2)$$

линейно зависима в  $L$ , так как она состоит из  $n+1$  векторов. Поэтому найдутся такие числа  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ , не равные одновременно нулю, что

$$\lambda_0 a + \lambda_1 \varphi(a) + \dots + \lambda_{n-1} \varphi^{n-1}(a) + \lambda_n \varphi^n(a) = 0. \quad (3)$$

Пусть  $\lambda_k$  — последнее отличное от нуля число в последовательности чисел  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Ясно, что  $\lambda_k \neq \lambda_0$ , так как  $a \neq 0$ . Мы имеем из (3):

$$\lambda_0 a + \lambda_1 \varphi(a) + \dots + \lambda_k \varphi^k(a) = 0.$$

Отсюда следует, что вектор  $\varphi^k(a)$  выражается через предшествующие векторы системы (2):

$$\varphi^k(a) = \mu_0 a + \mu_1 \varphi(a) + \dots + \mu_{k-1} \varphi^{k-1}(a). \quad (4)$$

Применяя  $n-k$  раз отображение  $\varphi$  к обеим частям равенства (4), получим:

$$\varphi^n(a) = \mu_0 \varphi^{n-k}(a) + \mu_1 \varphi^{n-k+1}(a) + \dots + \mu_{k-1} \varphi^{n-1}(a).$$

Пусть теперь  $b$  — любой вектор из  $L_1$ :

$$b = k_0 a + k_1 \varphi(a) + \dots + k_{n-1} \varphi^{n-1}(a).$$

Тогда

$$\varphi(b) = k_0 \varphi(a) + k_1 \varphi^2(a) + \dots + k_{n-1} (\mu_0 \varphi^{n-k}(a) + \dots + \mu_{k-1} \varphi^{n-1}(a)) \in L_1,$$

т. е.  $L_1$  — инвариантное относительно  $\varphi$  подпространство.

б) Учитывая, что числа 3, 0, 0, 0 являются координатами вектора  $a$ , находим координаты  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  вектора  $\varphi(a)$ :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя таким же образом векторы  $\varphi^2(a)$  и  $\varphi^3(a)$ , находим, что система (1) в данном случае будет состоять из векторов

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Базис этой системы, а значит, и  $L_1$  составляют, очевидно, векторы

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Найдем собственные значения и собственные векторы линейного отображения  $\varphi$  пространства  $\mathbf{R}^4$  над полем  $\mathbf{R}$ , заданного в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Так как мы рассматриваем линейное отображение  $\varphi$  пространства  $\mathbf{R}^4$  над полем  $\mathbf{R}$ , то собственными значениями отображения  $\varphi$  будут являться лишь действительные корни его характеристического уравнения  $|A - \lambda E| = 0$ . Вычислим определитель матрицы  $A - \lambda E$ :

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -5-\lambda & -3 \\ 4 & -1 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ \lambda^2-4\lambda+4 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -5-\lambda & -3 \\ 1+\lambda & -1 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \lambda^2-4\lambda+4 & 0 & 0 \\ 3 & -5-\lambda & -3 \\ 1+\lambda & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2-4\lambda+4) \begin{vmatrix} -5-\lambda & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (\lambda-2)^2 \cdot (\lambda+2)^2. \end{aligned}$$

Поскольку характеристическое уравнение  $(\lambda-2)^2 \cdot (\lambda+2)^2 = 0$  имеет действительные корни  $\lambda_{1,2} = 2$ ,  $\lambda_{3,4} = -2$ , то собственными значениями отображения  $\varphi$  являются числа 2 и  $-2$ . Собственными векторами, соответствующими собственному значению  $\lambda = 2$ , будут те и только те ненулевые векторы  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ , записанные своими координатами в том же базисе, что и матрица  $A$ , которые удовлетворяют матричному уравнению

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -7 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

т. е. системе однородных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \\ 3x_1 - 7x_3 - 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$$

или равносильной ей лестничной системе

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ 3x_3 - 7x_4 = 0, \\ 5x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Фундаментальный набор решений этой системы состоит из одного вектора, например вектора  $(8, 8, -3, 15)$ , а потому собственному значению  $\lambda = 2$  отвечают собственные векторы вида  $\alpha(8, 8, -3, 15)$ , где  $\alpha$  — любое отличное от нуля действительное число. При  $\lambda = -2$  имеем:

$$A - \lambda E = A + 2E = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

а потому координаты собственных векторов должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Фундаментальный набор решений этой системы состоит из одного вектора, например вектора  $(0, 0, -1, 1)$ . Поэтому собственному значению  $\lambda = -2$  отвечают собственные векторы вида  $\beta(0, 0, -1, 1)$ , где  $\beta$  — любое отличное от нуля действительное число.

4. Докажем, что, каково бы ни было невырожденное линейное отображение  $\varphi$  трехмерного пространства  $V_3$  векторов, исходящих из начала  $O$  прямоугольной системы координат  $Oxyz$ , существует инвариантная относительно  $\varphi$  прямая, проходящая через точку  $O$ . Найдем параметрическое уравнение одной из таких прямых, если  $\varphi$  задано в некотором базисе невырожденной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 6 \\ -3 & -2 & -7 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Пусть  $\varphi$  имеет в некотором базисе невырожденную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}, \quad |A| \neq 0.$$

Так как  $V_3$  — вещественное линейное пространство, характеристический многочлен

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} - \lambda \end{vmatrix}$$

отображения  $\varphi$  есть многочлен третьей степени с действительными коэффициентами, а потому характеристическое уравнение, будучи алгебраическим уравнением нечетной степени, имеет по крайней мере один действительный корень  $x = \lambda_1$ . Значит, отображение  $\varphi$  будет иметь собственное значение  $\lambda_1$ . Если  $\alpha$  — какой-либо собственный вектор, отвечающий этому собственному значению, то прямая  $t\alpha$ , проходящая через начало координат, будет, очевидно, искомой

инвариантной прямой. Найдем теперь характеристический многочлен матрицы  $A$ , указанной в условии:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 6 \\ 3 & 2-\lambda & 6 \\ -3 & -2 & -7-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda - 3 = \\ = -(\lambda + 3)(\lambda^2 - \lambda + 1).$$

Этот многочлен имеет, очевидно, действительный корень  $\lambda_1 = -3$ . Отвечающие собственному значению  $-3$  собственные векторы удовлетворяют матричному уравнению

$$(A + 3E)X = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 6 \\ -3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

или системе уравнений

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 + 6x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ -3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Решая данную систему методом Гаусса, получим:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ -3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Полагая  $x_3 = 9$ , найдем одно из решений:  $a = (-8, -6, 9)$ . Следовательно, искомым будет прямая  $x = t \cdot (-8, -6, 9)$ , где  $t$  — любое действительное число.

5. Выясним, можно ли матрицу  $A$  линейного отображения  $\varphi$  вещественного пространства  $L$  привести к диагональному виду путем перехода к новому базису, и если можно, то найдем этот базис и соответствующую ему диагональную матрицу:

$$\begin{aligned} \text{а) } A &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; & \text{б) } A &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 8 & 1 & -4 \\ 12 & 0 & -5 \end{pmatrix}; \\ \text{в) } A &= \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}; & \text{г) } A &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 6 \\ -3 & -2 & -7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Решение.** а) Находим характеристический многочлен матрицы  $A$ :

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = \\ = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1).$$

Он имеет три корня 1, 2 и  $-1$ , т. е. отображение  $\varphi$  имеет столько различных собственных значений из поля  $\mathbf{R}$ , какова размерность пространства  $L$  над полем  $\mathbf{R}$ . Следовательно, его матрица приво-

дится к диагональной форме — элементами ее главной диагонали будут собственные значения 1, 2 и  $-1$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для отыскания базиса нужно найти собственные векторы, отвечающие полученным собственным значениям, из соответствующих систем уравнений:

$$(I) \begin{cases} -2x_1 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_3 = 0, \\ x_3 = 0; \end{cases}$$

$$(II) \begin{cases} -3x_1 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0; \end{cases} \quad (III) \begin{cases} 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Фундаментальные наборы решений всех трех систем содержат по одному вектору:  $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 0)$  (система I),  $\mathbf{a}_2 = (2, -1, 3)$  (система II),  $\mathbf{a}_3 = (2, -1, 0)$  (система III) — все векторы заданы своими координатами в том же базисе, в каком задана матрица  $\mathbf{A}$ . Эти векторы и составляют искомым базис.

б) Найдем характеристический многочлен матрицы  $\mathbf{A}$ :

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 0 & -2 \\ 8 & 1 - \lambda & -4 \\ 12 & 0 & -5 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = \\ = -(\lambda - 1)^2 \cdot (\lambda + 1).$$

Так как у многочлена  $f(\lambda)$  имеется кратный корень  $\lambda = 1$ , т. е. не все корни различные, то сразу на поставленный в задаче вопрос ответить нельзя, надо сначала найти сумму размерностей собственных подпространств  $K(1)$  и  $K(-1)$ , отвечающих собственным значениям  $\lambda_1 = 1$  и  $\lambda_2 = -1$ . Для  $\lambda_1 = 1$  собственные векторы найдутся из системы уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + 0 \cdot x_2 - 2x_3 = 0, \\ 8x_1 + 0 \cdot x_2 - 4x_3 = 0, \\ 12x_1 + 0 \cdot x_2 - 6x_3 = 0, \end{cases}$$

фундаментальный набор которой состоит из 2 решений, например  $\mathbf{b}_1 = (1, 0, 2)$ ,  $\mathbf{b}_2 = (0, 1, 0)$ ; таким образом,  $\dim K(1) = 2$ . Для  $\lambda_2 = -1$  получим следующую систему:

$$\begin{cases} 6x_1 + 0 \cdot x_2 - 2x_3 = 0, \\ 8x_1 + 2 \cdot x_2 - 4x_3 = 0, \\ 12x_1 + 0 \cdot x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Ее фундаментальный набор состоит из одного вектора, например вектора  $\mathbf{b}_3 = (1, 2, 3)$ , откуда  $\dim K(-1) = 1$ . Итак,  $\dim K(1) + \dim K(-1) = 2 + 1 = 3 = \dim L$ . Поэтому (см. «Алгебра»,



теорема на с. 141) матрица  $A$  приводится к диагональной, а именно в базисе  $b_1, b_2, b_3$  она принимает вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

в) В этом случае характеристический многочлен

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -5 & -3 \\ 3 & -2 - \lambda & -2 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$$

также имеет кратный корень  $\lambda = 1$ . Подпространство  $K(1)$  задается системой уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \end{cases}$$

для которой фундаментальный набор решений состоит из одного вектора, откуда  $\dim K(1) = 1$ .

Подпространство  $K(2)$  задается системой

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases}$$

ее фундаментальный набор также состоит из одного вектора, поэтому  $\dim K(2) = 1$

Итак,  $\dim K(1) + \dim K(2) = 2 < 3$ , а значит, матрица к диагональному виду не приводится.

г) Характеристический многочлен  $f(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda^2 - \lambda + 1)$  (см. пример 4) имеет, в частности, корни  $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ , не принадлежащие полю  $\mathbf{R}$ . Поэтому матрица к диагональному виду не приводится.

#### Упражнения для самостоятельного решения

6. В пространстве  $\mathbf{R}^3$  линейное отображение  $\varphi$  переводит любой вектор  $x = (x_1, x_2, x_3)$  в вектор:

а)  $\varphi(x) = (x_1, 0, 0)$ ;

б)  $\varphi(x) = (\alpha x_1, x_2, x_3)$ ,  $\alpha \in \mathbf{R}$ .

Дайте геометрическую интерпретацию заданных отображений и для каждого отображения найдите все его инвариантные подпространства.

7. В пространстве  $\mathbf{R}^3$  линейное отображение  $\varphi$  задано в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

а) векторы  $a_1 = (1, 1, 0)$ ,  $a_2 = (1, 0, -1)$ ,  $a_3 = (2, 2, -1)$  — своими координатами в том же базисе. Покажите, что линейные

оболочки  $L_1 = L(a_1)$ ,  $L_2 = L(a_2)$ ,  $L_3 = L(a_3)$ ,  $L_4 = L(a_1, a_2)$  являются инвариантными относительно  $\varphi$  подпространствами.

8. В линейном пространстве  $R^3$  задан базис

$$a_1 = (1, 1, 0), \quad a_2 = (1, 1, 1), \quad a_3 = (0, 2, 2),$$

а отображение  $\varphi$  переводит произвольный вектор  $x \in R^3$ ,  $x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3$  в вектор  $\varphi(x) = x_1 a_1$ . Узнайте, какие из векторов

$$b_1 = (-2, -2, 0), \quad b_2 = (5, 5, 0), \quad b_3 = (2, 2, 2), \\ b_4 = (2, 8, 8), \quad b_5 = (2, 2, 1)$$

являются собственными векторами отображения  $\varphi$  и каким собственным значениям они отвечают.

9. Найдите собственные значения и собственные векторы линейных отображений, заданных в некотором базисе матрицами:

$$\begin{aligned} \text{а)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}; \\ \text{г)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{д)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

10. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного отображения  $\varphi$ , заданного в базисе  $a_1, a_2, a_3, a_4$  матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

и покажите, что подпространство, натянутое на векторы  $a_1 + 2a_2$  и  $a_2 + a_3 + 2a_4$ , инвариантно относительно  $\varphi$ .

11. Докажите, что линейное подпространство, натянутое на любую систему собственных векторов линейного отображения  $\varphi$ , инвариантно относительно  $\varphi$ .

12. Найдите все подпространства вещественного трехмерного пространства, инвариантные относительно линейного отображения, заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. Известно, что для каждого многочлена  $f(x)$  вещественного пространства  $F_n$  многочленов степени  $\leq n$   $\varphi(f(x)) = f'(x)$ . Найдите собственные значения и собственные векторы отображения  $\varphi$ , а также все инвариантные относительно  $\varphi$  подпространства.

14. В трехмерном вещественном пространстве  $L$  линейное отображение  $\varphi$  задано в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Векторы  $\alpha_1 = (1, 1, 0)$ ,  $\alpha_2 = (-1, 0, 1)$  составляют базис подпространства  $K$  (2) (см. упр. 12). Дополните этот базис до базиса пространства  $L$  и найдите в построенном базисе матрицу отображения  $\varphi$ .

15. Выясните, какие из следующих матриц линейных отображений можно привести к диагональному виду путем перехода к новому базису. Найдите этот базис и соответствующую ему матрицу:

а)  $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -6 \\ 4 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & -6 \end{pmatrix};$  б)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$

в)  $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -8 & 5 & 4 \\ 6 & -12 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix};$  г)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

16. Найдите диагональную матрицу над полем  $\mathbf{R}$ , подобную матрице

$$\begin{pmatrix} 8 & 15 & -36 \\ 8 & 21 & -46 \\ 5 & 12 & -27 \end{pmatrix}.$$

17. Докажите, что собственными значениями треугольной матрицы являются ее диагональные элементы.

18. Докажите, что все собственные значения квадратной матрицы  $A$  отличны от нуля тогда и только тогда, когда матрица обратима.

19. Линейное отображение  $\varphi$  пространства  $\mathbf{R}^3$  задано невырожденной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите собственные значения отображения  $\varphi^{-1}$ .

20. В некотором базисе пространства  $\mathbf{R}^2$  преобразование  $\varphi$  задано матрицей:

а)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$  б)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Убедитесь непосредственно, что в случае а) собственных векторов не существует, а в случае б) каждый вектор является собственным.

# Глава I

- § 1. 3. а) Умножение; б) сложение, умножение; в) сложение, вычитание, умножение 4. Нет. 5. а) Нет; б) да; в) нет; г) нет, д) да; е) да. 6. а) Нет; б) нет; в) да; г) да. 7. а) Да; б) да. 11. Является 12. а) Не является; б) не является. 13. Является. 14. Является 16. а) Является, б) не является. 17.  $N$  и  $M_1$ ; каждая из систем  $N$  и  $M_1$  не изоморфна  $M_2$ . 23. Изоморфизм есть отношение эквивалентности.
- § 2. 2. Вычитание не коммутативно и не ассоциативно 4. Операции б) и в) коммутативны и ассоциативны 8. Полугруппа 15. Операция  $a \circ b$  не ассоциативна. 18. Нейтральный элемент — число  $1 + 0\sqrt{5} = 1$ . Обратного элемента для числа  $5 - 2\sqrt{5}$  нет, так как  $\frac{1}{5 - 2\sqrt{5}} = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{(5 + 2\sqrt{5})(5 - 2\sqrt{5})} = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} = 1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}$  — полученное число не принадлежит данному множеству. 20. Операция обратима, так как уравнение  $a \circ x = b$  разрешимо при любых  $a$  и  $b$  ( $\frac{a+x}{2} = b \Rightarrow x = 2b - a$ ) 22. Операция не обратима. 23. Не обратимы. 24. Обратима 25. Пустое подмножество является нейтральным элементом для операции объединения, а само  $I$  — для операции пересечения Обе операции не обратимы 26. Для операции  $a \circ b = -ab$  нейтральным элементом служит число  $-1$ . 27. Нейтральный элемент — число 2. Для элемента 8 обратным является  $\frac{1}{2}$ .
- § 3 4. а), б), д) Не является; в), г), е), ж), к), л), м), н), п), р) является; з) группа относительно сложения; и) группа относительно умножения; о) не является (сумма двух многочленов степени  $n$  может иметь меньшую степень). 5. Не группа. 9. Таблица умножения

$\cdot$	$e$	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$s$	$t$
$e$	$e$	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$s$	$t$
$g_1$	$g_1$	$e$	$t$	$s$	$g_3$	$g_2$
$g_2$	$g_2$	$s$	$e$	$t$	$g_1$	$g_3$
$g_3$	$g_3$	$t$	$s$	$e$	$g_2$	$g_1$
$s$	$s$	$g_1$	$g_3$	$g_1$	$t$	$e$
$t$	$t$	$g_3$	$g_1$	$g_2$	$e$	$s$

где

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

10.

	$p_0$	$p_1$	$p_2$	$p_3$
$p_0$	$p_0$	$p_1$	$p_2$	$p_3$
$p_1$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_0$
$p_2$	$p_2$	$p_3$	$p_0$	$p_1$
$p_3$	$p_3$	$p_0$	$p_1$	$p_2$

13.

	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$a_0$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$a_1$	$a_1$	$a_2$	$a_0$	$a_4$	$a_5$	$a_3$
$a_2$	$a_2$	$a_0$	$a_1$	$a_5$	$a_3$	$a_4$
$a_3$	$a_3$	$a_5$	$a_4$	$a_0$	$a_2$	$a_1$
$a_4$	$a_4$	$a_3$	$a_5$	$a_1$	$a_0$	$a_2$
$a_5$	$a_5$	$a_4$	$a_3$	$a_2$	$a_1$	$a_0$

15. Таблица умножения имеет вид:

	$e_1$	$a_1$	$b_1$	$c_1$
$e_1$	$e_1$	$a_1$	$b_1$	$c_1$
$a_1$	$a_1$	$e_1$	$c_1$	$b_1$
$b_1$	$b_1$	$c_1$	$e_1$	$a_1$
$c_1$	$c_1$	$b_1$	$a_1$	$e_1$

где  $e_1$  и  $a_1$  — повороты прямоугольника вокруг его центра на углы  $0^\circ$ ,  $180^\circ$ , а  $b_1, c_1$  — отражения прямоугольника относительно его осей симметрии.

16.  $\{e, a, b, c\}$ , где  $e, a$  — повороты ромба вокруг его центра на углы  $0^\circ$ ,  $180^\circ$ ;  $b, c$  — отражения ромба относительно его диагоналей. При этом  $ab = c$ ,  $ac = b$ ,  $bc = a$ .

17.  $\{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$ , где  $a_0, a_1, a_2, a_3$  — повороты вокруг центра квадрата на углы  $0, \frac{\pi}{2}, 2\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}$ ;  $a_4, a_5, a_6, a_7$  — отражения относительно осей симметрии квадрата (двух диагоналей и двух прямых, соединяющих середины противоположных сторон) Таблица умножения имеет вид.

	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
$a_0$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
$a_1$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_0$	$a_7$	$a_6$	$a_4$	$a_5$
$a_2$	$a_2$	$a_3$	$a_0$	$a_1$	$a_5$	$a_4$	$a_7$	$a_6$
$a_3$	$a_3$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_6$	$a_7$	$a_5$	$a_4$
$a_4$	$a_4$	$a_6$	$a_5$	$a_7$	$a_0$	$a_2$	$a_1$	$a_3$
$a_5$	$a_5$	$a_7$	$a_4$	$a_6$	$a_2$	$a_0$	$a_3$	$a_1$
$a_6$	$a_6$	$a_5$	$a_7$	$a_4$	$a_3$	$a_1$	$a_0$	$a_2$
$a_7$	$a_7$	$a_4$	$a_6$	$a_5$	$a_1$	$a_3$	$a_2$	$a_0$

18. а), в), г). Да; б) нет 19. Группа состоит из  $n$  элементов: поворотов вокруг центра многоугольника на углы  $0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots, (n-1)\alpha$ , где  $\alpha = \frac{2\pi}{n}$  радиан. 25. Все, кроме а). 26. Множество поворотов вокруг данной точки.

§ 4. 9. Порядки элементов соответственно 2,  $\infty$ , 4. 11. Элемент  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  имеет порядок 1, элементы  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  — порядок 3, остальные элементы имеют порядок 2. Группа  $S_3$  имеет 6 различных подгрупп, включая  $\{e\}$  и  $S_3$ . Все подгруппы, кроме  $S_3$ , являются циклическими. 12. а)  $O(e) = 1$ , остальные элементы имеют порядок 2, группа не является циклической; б)  $O(a_0) = 1$ ,  $O(a_1) = O(a_2) = 3$ ,  $O(a_3) = O(a_4) = O(a_5) = 2$ , так как порядок любого элемента меньше, чем порядок всей группы, то группа не циклическая. Группа поворотов треугольника является циклической.

13. Таблица сложения в  $Z_5$ :

	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

14.  $u = (1245) \cdot (3768)$ ,  $v = (194) \cdot (267) \cdot (358)$ ,  $w = (12) \cdot (467) \cdot (58)$ .  
 15.  $u = (12) \cdot (14) \cdot (15) \cdot (37) \cdot (36) \cdot (38)$ ,  $v = (19) \cdot (14) \cdot (26) \cdot (27) \times$   
 $\times (35) \cdot (38)$ ,  $w = (12) \cdot (46) \cdot (47) \cdot (58)$ , все подстановки четные. 16.  $u =$   
 $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 8 & 1 & 3 & 6 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ ,  
 $w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$  17.  $O(a) = 4$ ; элемент  $a$  порождает циклическую  
 подгруппу  $(a)$  из 4 элементов  $a^0 = (e) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $a^1 = (1\ 2\ 4\ 3)$ ,  $a^2 =$   
 $= (13) \cdot (24)$ ,  $a^3 = (1432)$  19. а)  $(2) \cap (3) = (6) = \{x|x_x = 6k, k \in \mathbb{Z}\}$ ;  
 б)  $(6) \cap (8) = (24)$  20.  $O(a) = 5$ ,  $(a) = \{a^0 = (e), a = (12345), a^2 =$   
 $= (13524), a^3 = (14253), a^4 = (15432)\}$ . 21.  $(a) = \{a^0 = (e), a^1 = (1342),$   
 $a^2 = (14) \cdot (23), a^3 = (1243)\}$ ,  $(b) = \{b^0 = e, b^1 = (1243), b^2 = (14) \cdot (23) =$   
 $= a^2, b^3 = (1342) = a\}$ ,  $(a) \cap (b) = \{e, a, a^2\}$  — циклическая подгруппа.  
 25.  $k$  должно быть взаимно просто с  $m$  26. Пусть  $a$  — поворот вокруг цент-  
 ра 12-угольника на угол  $\frac{2\pi}{12}$  Образующие группы  $a^1, a^5, a^7, a^{11}$ . 27.  $O(a) =$   
 $= 6$ ,  $O(a^3) = 2$ ,  $a^{-1} = a^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (165432)$ ,  $(a^3)^{-1} = a^3$ . 28.  $m =$   
 $= 1, 2, 3, 4$ . 30. а)  $O(a_1) = 2$ ,  $O(a_2) = 3$ ,  $O(a_3) = 12$ ,  $O(a_4) = 4$ ; б) на  
 угол  $\frac{\pi}{10}$ ; в) на углы вида  $r\pi$ , где  $r$  — рациональное число 31.  $G$  состоит из  
 переносов плоскости на векторы, параллельные данной прямой, и из ком-  
 позиций таких переносов с отражением относительно прямой 32.  $\{e, a, b, c\}$  —  
 циклическая группа с образующей  $b$  (или  $c$ ). 34. Данная группа — цик-  
 лическая с образующей  $b$  В силу упражнения 33 она имеет три подгруппы,  
 включая саму группу и  $\{e\}$  35. Так как  $O(a) = 9$ , то в силу упражнения 33  
 искомые подгруппы будут: 1) сама группа  $(a) = \{e, a^1, a^2, \dots, a^8\}$ ;  
 2)  $\{e, a^3, a^6\}$ ; 3)  $\{e\}$  36. В силу упражнения 33 все подгруппы имеют вид:  
 $\{0, d, 2d, 3d, \dots, (k-1)d\}$ , где  $d$  — любой делитель числа  $n$ , причем  
 $kd = n$  37. а) См. ответ к 36; б) группа (см. упр. 17 в § 3) имеет подгруппы:  
 $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$  (повороты вокруг центра квадрата),  $\{a_0, a_2\}$  (подгруппа,  
 порожденная центральной симметрией  $a_2$ ),  $\{a_0, a_4\}$ ,  $\{a_0, a_5\}$ ,  $\{a_0, a_6\}$ ,  
 $\{a_0, a_7\}$  (подгруппы, порожденные отражениями), а также две тривиальные  
 подгруппы  $\{a_0\}$  и саму группу. 40. а) Группа содержит лишь единичный  
 элемент, б) циклическая группа простого порядка  $p$ ; в) циклическая группа  
 порядка  $p^2$ , где  $p$  — простое. 43. Группа самосовмещений ромба (см. 16 в  
 § 3) не циклическая. 44. а)  $Z_2$ ; б)  $Z_3$ ; в)  $Z_4$ , а также группа самосовмещений  
 прямоугольника (см. 15 в § 3); г)  $Z_5$  45. Нет. 46. Подгруппа  $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$   
 (см. 17 в § 3). 48.  $nk$ . 50. а)  $a, a^3, a^5, a^7$ ; б)  $O(a^2) = \frac{8}{(8,2)} = \frac{8}{2} = 4$ ,  
 $O(a^4) = 2$ ,  $O(a^6) = 4$ ; в) единичный элемент с любым другим элементом  
 группы.

§ 5. 4. У к а з а н и е. Таблица должна быть симметрична относительно диа-  
 agonали; в каждой строке и в каждом столбце таблицы должны встречаться  
 все элементы данного множества. 5.  $b$  — нейтральный элемент, операция  
 коммутативна, ассоциативна, не является обратимой,  $M$  — полугруппа, но  
 не группа. 6. Является. 7. Таблица Кэли имеет вид

	$e$	$a$	$b$	$c$
$e$	$e$	$a$	$b$	$c$
$a$	$a$	$e$	$c$	$b$
$b$	$b$	$c$	$e$	$a$
$c$	$c$	$b$	$a$	$e$

8. Группа коммутативна. Таблица Кэли:

	$f_0$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$
$f_0$	$f_0$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$
$f_1$	$f_1$	$f_0$	$f_4$	$f_5$	$f_2$	$f_3$
$f_2$	$f_2$	$f_5$	$f_0$	$f_3$	$f_1$	$f_4$
$f_3$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_0$	$f_1$	$f_2$
$f_4$	$f_4$	$f_3$	$f_1$	$f_2$	$f_5$	$f_0$
$f_5$	$f_5$	$f_2$	$f_3$	$f_1$	$f_0$	$f_4$

Элементы  $f_0, f_1, f_2, f_3$  обратны сами себе; группа некоммутативна ( $f_1 f_3 \neq f_3 f_1$ ),  $\varphi = f_4$ ,  $\psi = f_5$ . 9. Если в таблице умножения группы  $S_3$  заменить элементы  $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,

$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  соответственно элементами  $f_0, f_1, f_3, f_2, f_4, f_5$  группы  $F$ , то получим таблицу Кэли для  $F$ . Поэтому отображение  $f_0 \rightarrow e, f_1 \rightarrow g_1, f_2 \rightarrow g_3, f_3 \rightarrow g_2, f_4 \rightarrow s, f_5 \rightarrow t$  является изоморфизмом группы  $F$  на группу  $S_3$ . 10. У к а з а н и е. Применить теорему Кэли (см. решение примера 1). Использовать таблицу Кэли для группы самосовмещений ромба (см. упр. 7).

11.  $G = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ , где  $a_1$  и  $a_2$  — повороты на углы  $0, \pi$  вокруг вершины  $O$  и  $a_3, a_4$  — отражения относительно осей симметрии  $KL$  и  $MN$  фигуры  $\Phi$  (см. рис. 3). Элементам группы  $G$  отвечают подстановки

$$a_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad a_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad a_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad a_4 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Таблица Кэли для группы  $G$  имеет вид

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
$a_1$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
$a_2$	$a_2$	$a_1$	$a_4$	$a_3$
$a_3$	$a_3$	$a_4$	$a_1$	$a_2$
$a_4$	$a_4$	$a_3$	$a_2$	$a_1$

Группа  $G$  абелева. 12. Обозначим вершины квадрата цифрами 1, 2, 3, 4. Элементами группы являются

$$a_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad a_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad a_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad a_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Составив таблицу Кэли, найдем, что отображение

$$a_0 \rightarrow g_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad a_1 \rightarrow g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix},$$

$$a_2 \rightarrow g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad a_3 \rightarrow g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$



$$a_4 \rightarrow g_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 6 & 7 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad a_5 \rightarrow g_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 5 & 8 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$a_6 \rightarrow g_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 8 & 6 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad a_7 \rightarrow g_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 6 & 7 & 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

является изоморфным отображением группы  $G$  на подгруппу  $\{g_0, g_1, \dots, g_7\}$  группы  $S_8$ . 14. Правильный тетраэдр имеет 7 осей: 4 его высоты и еще 3 прямые, проходящие через середины противоположных ребер. Группа вращений тетраэдра состоит из тождественного движения, вращений тетраэдра

вокруг его высот на углы  $\frac{2\pi}{3}$ ,  $\frac{4\pi}{3}$  и вращений вокруг трех остальных осей

на угол  $\pi$ . 15. Группа включает 12 элементов группы вращений тетраэдра и еще 12 новых элементов — отражений относительно плоскостей симметрий тетраэдра, проходящих через его высоты. 17. Подстановки  $a = (13) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 3 & 2 & 1 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$  и  $b = (123) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 3 & 1 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$  не коммутируют ( $ab \neq ba$ ). 18. Подстановки  $g = (123)$  и  $h = (234)$  не коммутируют ( $gh \neq hg$ ).

§ 6. 2. а)  $M = \{a_0, a_1, a_2\}$ ,  $a_3M = \{a_3, a_5, a_4\}$  — два класса,  $a_0, a_1, a_2$  — повороты треугольника,  $a_3, a_4, a_5$  — отражения относительно высот; б)  $A = \{a_0, a_3\}$ ,  $a_1A = \{a_1, a_4\}$ ,  $a_2A = \{a_2, a_5\}$ . 5. В обозначениях задач 12—13 § 3: а) левое разложение:  $M, a_3M = \{a_3, a_4, a_5\}$ , правое:  $M, Ma_3 = \{a_3, a_5, a_4\}$ . 6. См. ответ к 17 § 3. В обозначениях этой задачи:  $A = \{a_0, a_4\}$ . Левое разложение:  $A, a_1A = \{a_1, a_7\}$ ,  $a_2A = \{a_2, a_5\}$ ,  $a_3A = \{a_3, a_6\}$ , правое.  $A, Aa_1, Aa_2, Aa_3$ . 7. Разложение по подгруппе  $\{e\}$  состоит из всех одноэлементных подмножеств группы  $G$ ; разложение по  $G$  состоит из единственного смежного класса  $G$ . 8. Искомое разложение состоит из  $12 : 3 = 4$  классов:  $B = \{e, (123), (132)\}$ ,  $(124)B = \{(124), (13)(24), (243)\}$ ,  $(142)B = \{(142), (143), (14)(23)\}$ ,  $(234)B = \{(234), (12)(34), (134)\}$ . 9. 1)  $K_1$  является левым смежным классом по подгруппе  $A = \{e, (12)\}$ , но не является правым смежным классом; 2)  $K_2$  не является смежным классом. 11. Группа является циклической; два элемента порядка 2, один — порядка 1, один — порядка 4. 12. Воспользоваться теоремой Лагранжа. Две подгруппы:  $\{e\}$  и сама группа  $G$ . 13. Может. В группе  $A_4$ , порядок которой равен 12, не существует подгруппы порядка 6. 16.  $Z_4$  и группа самосовмещений ромба (изоморфная  $Z_2 \times Z_2$ ). 18.  $Z_6$  и  $S_3$ . 19. б) Только сама  $H$ ; в обозначениях задачи 17 § 3 имеем:  $Ha_4 = Ha_5 = Ha_7 = H$ .

§ 7. 4. Пусть  $G$  — данная группа,  $H$  — данная подгруппа и  $g$  — любой элемент из  $G$ . Если  $g \in H$ ,  $gH = Hg = H$ . Если  $g \notin H$ , то каждый из смежных классов  $gH$  и  $Hg$  совпадает с дополнением к  $H$  (в  $G$ ), так что снова  $gH = Hg$ . 7. Не является. В обозначениях задачи 17 § 3 имеем:  $a = a_4$ ,  $a_1a_4a_1^{-1} = a_7a_3 = a_5 \notin H$ , следовательно,  $a_1Ha_1^{-1} \neq H$ . 8. В группе самосовмещений квадрата (см. ответ к 17 § 3) подгруппа  $M = \{a_0, a_3, a_4, a_5\}$  является нормальным делителем (ее порядок вдвое меньше порядка группы), а подгруппа  $H = \{a_0, a_4\}$  — нормальный делитель в  $M$ ; однако  $H$  не является нормальным делителем всей группы (см. задачу 7). 9. Да. 10. Группа  $S_3$  имеет 6 подгрупп, из которых  $\{e\}$ ,  $A_3$  и  $S_3$  являются нормальными делителями. Остальные подгруппы  $A = \{(1), (23)\}$ ,  $B = \{(1), (12)\}$ ,  $C = \{(1), (13)\}$  не являются нормальными делителями. 14. Смежный класс матрицы  $A$  состоит из всех матриц, определитель которых равен определителю  $A$ . 18. В обозначениях задачи 17 § 3 имеем:  $G/A = \{A, a_1A, a_4A, a_7A\}$ , где  $A = \{a_0, a_2\}$ ,  $a_1A = \{a_1, a_3\}$ ,  $a_4A = \{a_4, a_6\}$ ,  $a_7A = \{a_7, a_5\}$ . Таблица Кэли для  $G/A$  дана на с. 113. 19.  $Z_8/H = \{H, 1+H, 2+H, 3+H\}$ . 20. Обратное утверждение неверно. Например,  $S_3/A_3 = \{A_3, (12) \cdot A_3\}$  — циклическая (а значит, коммутативная) фактор-группа, между тем сама группа  $S_3$  не коммутативна. 24.  $A \cap B = (12)$ , и, значит, фактор-группа состоит из классов  $H, 1+H, 2+H, \dots, 11+H$ , где  $H = (12)$ . 26. Элементы группы  $A_4$ :  $(1), (123)$ ,

	$A$	$a_1 A$	$a_4 A$	$a_7 A$
$A$	$A$	$a_1 A$	$a_4 A$	$a_7 A$
$a_1 A$	$a_1 A$	$A$	$a_7 A$	$a_4 A$
$a_4 A$	$a_4 A$	$a_7 A$	$A$	$a_1 A$
$a_7 A$	$a_7 A$	$a_5 A$	$a_1 A$	$A$

(1 2 4), (1 3 4), (1 3 2), (1 4 2), (1 4 3), (2 3 4), (2 4 3), (1 2) (3 4), (1 3) (2 4), (1 4) (2 3). Левое и правое разложения группы  $A_4$  по подгруппе  $M = \langle g \rangle$  могут быть, например, записаны так:

$M = \{(1), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\},$   
 $(2\ 3\ 4)\ M = \{(2\ 3\ 4), (1\ 2)\ (3\ 4), (1\ 3\ 4)\},$   
 $(2\ 4\ 3)\ M = \{(2\ 4\ 3), (1\ 2\ 4), (1\ 3)\ (2\ 4)\},$   
 $(1\ 4\ 3)\ M = \{(1\ 4\ 3), (1\ 4)\ (2\ 3), (1\ 4\ 2)\},$

$M$

$M\ (2\ 3\ 4) = \{(2\ 3\ 4), (1\ 3)\ (2\ 4), (1\ 4\ 2)\},$   
 $M\ (2\ 4\ 3) = \{(2\ 4\ 3), (1\ 4\ 3), (1\ 2)\ (3\ 4)\},$   
 $M\ (1\ 4\ 3) = \{(1\ 4\ 3), (1\ 2)\ (3\ 4), (2\ 4\ 3)\}.$

Подгруппа  $M$  не является нормальным делителем. 27. Левое разложение  $V$ ,  $(2\ 3\ 4)\ V = \{(2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4), (1\ 3\ 2), (1\ 4\ 3)\}, (2\ 4\ 3)\ V = \{(2\ 4\ 3): (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 4\ 2)\}$ . Правое разложение совпадает с левым, так что  $V$  — нормальный делитель. Таблица умножения для фактор-группы  $A_4/V$ :

	$V$	$(234)\ V$	$(243)\ V$
$V$	$V$	$(234)\ V$	$(243)\ V$
$(234)\ V$	$(234)\ V$	$(243)\ V$	$V$
$(243)\ V$	$(243)\ V$	$V$	$(234)\ V$

28. Обе группы  $Z_4/D$  и  $Z_2$  — циклические порядка 2, поэтому они изоморфны. 30. Каждая подстановка из  $A_5$  имеет один из видов:  $(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5), (i_1 i_2 i_3), (i_1 i_2) (i_3 i_4)$ . Число различных подстановок первого вида равно  $5!/5 = 24$ , второго —  $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3} = 20$ , третьего — 15. Далее, если нормальный делитель

$H$  содержит подстановку одного из указанных видов, то он содержит все подстановки этого вида. Поэтому число элементов в  $H$  может быть лишь одним из чисел: 1; 1 + 24; 1 + 20; 1 + 15; 1 + 24 + 20; 1 + 24 + 15; 1 + 20 + 15; 1 + 24 + 20 + 15 = 60. Ни одно из этих чисел, кроме 1 и 60, не является делителем числа 60 — порядка группы  $A_5$ . 32. Кроме  $\{e\}$  и самой группы, имеются еще нормальные делители а)  $\{(0, 0), (1, \bar{0})\}, \{(0, 0), (0, 1)\}, \{(0, 0), (1, 1)\}$ ; б) подгруппа  $A = \{a_0, a_1, a_2\}$  вращений треугольника; в) подгруппа  $H = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$  вращений квадрата (в обозначениях задачи 17 § 3); подгруппа  $\{a_0, a_2, a_4, a_5\}$ ; подгруппа  $\{a_0, a_2, a_3, a_7\}$ , подгруппа  $\{a_0, a_3\}$ ; фактор-группы в первых трех случаях изоморфны  $Z_2$ , в последнем случае — группе  $Z_2 \times Z_2$ . 33. Искомое разложение может быть записано, например, так:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} V = V = \{e = (1), (1\ 2)\ (3\ 4), (1\ 3)\ (2\ 4), (1\ 4)\ (2\ 3)\},$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} V = (123) V = \{(123), (243), (142), (134)\},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} V = (1\ 2)V = \{(1\ 2), (3\ 4), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 3\ 2\ 4)\},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} V = (1\ 3\ 2)V = \{(1\ 3\ 2), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4)\},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} V = (1\ 3)V = \{(13) (1\ 4\ 3\ 2), (2\ 4), (1\ 2\ 3\ 4)\},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} V = (2\ 3)V = \{(2\ 3), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4)\}.$$

$$S_4/V = \{V, (1\ 2\ 3)V, (1\ 2)V, (1\ 3\ 2)V, (1\ 3)V, (2\ 3)V\}.$$

34. Так как при разложении  $S_4$  по группе  $V$  Клейна у элементов, порождающих смежные классы, символ 4 неподвижен, то умножение этих элементов сводится к умножению соответствующих элементов из трех первых символов, т. е. подстановок из симметрической группы  $S_3$ . Если учесть это, а также правило умножения смежных классов — элементов фактор-группы, то станет понятным, что отображение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} V \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} V \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} V \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} V \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} V \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} V \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

является изоморфизмом фактор-группы  $S_4/V$  на группу  $S_3$ . 38. Подгруппами группы  $S_4$ , содержащими группу Клейна, являются: 1) знакопеременная группа  $A_4$  четвертой степени; 2) группа Клейна; 3)  $\{e, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(24), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 2), (3\ 4), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 3\ 2\ 4)\}$ ; 4)  $\{e, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(24), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 3), (2\ 4), (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 4\ 3\ 2)\}$ ; 5)  $\{e, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3), (2\ 3), (1\ 4), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 2\ 4\ 3)\}$ . Из них нормальными делителями являются  $A_4$  и группа Клейна. 39. Могут. Например, группа вращений квадрата не изоморфна группе самосовмещений ромба ( $Z_4$  не изоморфна  $Z_2 \times Z_2$ ), между тем их нормальные делители  $\{e, a\}$  ( $e$  — тождественное движение,  $a$  — отражение от центра) и фактор-группы по ним изоморфны (группе  $Z_2$ ).

§ 8. 3. Обратное утверждение неверно: примером может служить гомоморфизм  $S_3 \rightarrow S_3/A_3$ . 7. Ядром гомоморфизма является подгруппа  $H_n = \{x|x = nk, k \in \mathbb{Z}\}$  группы  $\mathbb{Z}$ , прообразом элемента  $g$  — смежный класс  $1 + H_n$ . Фактор-группа состоит из элементов  $H_n, 1 + H_n, 2 + H_n, \dots, (n-1) + H_n$  и изоморфна  $\mathbb{Z}_n$ . 8. Потому что группа  $A_3$  — циклическая. Ядром гомоморфизма является подгруппа (нормальный делитель)  $H_3 = \{x|x = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$  группы  $\mathbb{Z}$ . 9. См. 8. 10. Группа  $S_4$  отображается гомоморфно на  $S_4/V$ , где  $V$  — группа Клейна (см. 33 § 7), а группа  $S_4/V$  изоморфна  $S_3$  (см. 34 § 7). 11. Гомоморфизм имеет вид:  $ax + b \rightarrow b$ . 12. Искомый гомоморфизм:  $(a, b) \rightarrow a$ . Можно также взять:  $(a, b) \rightarrow b$ , или более обще:  $(a, b) \rightarrow pa + qb$  (где  $p$  и  $q$  — два фиксированных действительных числа). 15. Может. Например, группа  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$  имеет изоморфные нормальные делители  $\{e_1\} \times \mathbb{Z}_2 = \{(0, 0), (0, 1)\}$  и  $\{0, 2\} \times \{e_2\} = \{(0, 0), (2, 0)\}$ , фактор-группы, по которым неизоморфны ( $\mathbb{Z}_4$  и  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ).

§ 9. 2. а), в), д) Нет; б), г) да. 3. Нет ( $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15} \notin L$ ). 6.  $a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c)$ ,  $(a \circ b) * c = (a * c) \circ (b * c)$ . Сложение чисел не дистрибутивно относительно умножения:  $a + (bc) \neq (a + b) \cdot (a + c)$ ,  $(ab) + c \neq (a + c)(b + c)$ . 7. Да. 8. Нет. 9. Нет. 10. а), в) Да; б) нет. 12. Имеет:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Theta$ . 14. Единичным элементом является число  $-1$ . 15. Единичным элементом является число 2. 18. По определению поле должно содержать более одного элемента. 19. Поле. Нулем является  $a$ , единицей —  $b$ . 23. В  $\mathbb{Z}_8$  имеются делители нуля:  $2 \cdot 4 = 4 \cdot 2 = 0$ . 24. Если  $n = pq$ , где  $p > 1, q > 1$ , то в кольце  $\mathbb{Z}_n$  имеем  $pq = 0$ . 25. Воспользоваться задачей 16.

26. Характеристика  $Z_p$  равна  $p$ . 31. Не является: ни одна из операций  $\cup$ ;  $\cap$  не обратима. 35. Не является: операция  $\oplus$  не коммутативна. 36. Все подкольца имеют тот же вид, что и подгруппы аддитивной группы  $Z$ , т. е.  $H_0, H_1, H_2, \dots$ , где  $H_0 = \{0\}$ , а  $H_n = \{nklk \in Z\}$ . 38. В задаче 37 вместо 5 можно взять другое число. 39. Например, множество матриц указанного вида, где  $a, b \in Q$ , или множество матриц, в которых  $b = 0$ . 40. Решение уравнения  $(3 + 2\sqrt{5})x = 2 - 3\sqrt{5}$  не принадлежит кольцу  $Z[\sqrt{5}]$ , следовательно,  $Z[\sqrt{5}]$  не поле. 44. Подкольца те же, что и подгруппы в аддитивной группе  $Z_n$ ; число подколец равно числу натуральных делителей числа  $n$ . 46. а) Система несовместна; б) имеет единственное решение  $(2, 3, 2)$ ; в) имеет единственное решение  $(5, 6, 5)$ . 48. У к а з а н и е. В произведении  $(a + b) \times (c + e)$  раскрыть скобки двумя разными способами. 50.  $\gamma^{-1} = \frac{1}{43} (5 + 9\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4})$ . 51. Кольцо  $Z_{p^2}$ . 53. Например,  $f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ x, & \text{если } x > 0, \end{cases}$   $f_2(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \leq 0, \\ 0, & \text{если } x > 0. \end{cases}$  54. Уравнение  $(1 - 3\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{4})(x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4}) = -18 + 10\sqrt[3]{2} + 20\sqrt[3]{4}$  над кольцом  $Z$  сводится к системе трех уравнений (выпишите эту систему), которая не имеет решений. 55. б) Например, потому что кольцо  $\{a + b\sqrt[3]{5} \mid a, b \in Q\}$  — поле. 59.  $Z$  является кольцом с единицей, а указанные в задаче подкольца не имеют единичных элементов. 60. Можно, примером является гомоморфизм  $Z \rightarrow Z_2$ . 61. Нельзя; можно (например, если каждому четному числу сопоставить его остаток от деления на 5, то получим требуемый гомоморфизм  $H_2 \rightarrow Z_5$ ). 69. В упорядоченном поле  $1 = 1 \cdot 1 > 0$ , следовательно,  $n \cdot 1 = \underbrace{1 + \dots + 1}_n > 0$  при любом натуральном  $n$ .

- § 10. 5. а)  $2 + i$ ; б)  $\frac{127 + i\sqrt{3}}{2}$ ; в)  $\frac{44 - 5i}{318}$ ; г)  $2i^{n-1}$ . 6.  $f(1 - 2i) = -4 + 23i$ .  
 7. а)  $x = -\frac{4}{11}$ ,  $y = \frac{5}{11}$ ; б)  $x_1 = 1$ ,  $y_1 = 3$ ;  $x_2 = -1$ ,  $y_2 = -3$ ; в)  $x = 4$ ,  
 $y = 2$ . 8. 1. 9. а)  $\pm(3 + i)$ ; б)  $\pm(2 - i)$ ; в)  $\pm \frac{1}{2}(\sqrt{6} + i\sqrt{66})$ .  
 10. а)  $-2 + i$ ,  $-3 + i$ ; б)  $2i$ ,  $-1$ ; в)  $1 - i$ ,  $\frac{4 - 2i}{5}$ . 15.  $0, 1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ . 18. Образуют поле.

## Глава II

- § 1. 5. а) Нет; б) нет; в) да; г) нет. 6. Сложение в множестве невырожденных матриц не является алгебраической операцией. 7. Является. 8.  $Z_3^2$  состоит из 9 элементов:  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(2, 2)$ ;  $Z_3^n$  состоит из  $3^n$  элементов. 11. а) 0; б)  $3a$ ; в) 0. 12. а)  $(-35, 12, 11, 20)$ ;  
 б)  $\begin{pmatrix} -35 & 12 \\ 11 & 20 \end{pmatrix}$ ; в)  $-35 + 12x + 11x^2 + 20x^3$ . 13. а)  $x = \left(-\frac{9}{7}, -\frac{5}{7}, -\frac{6}{7}, 3\right)$ ;  
 б)  $\begin{pmatrix} -\frac{9}{7} & -\frac{5}{7} \\ -\frac{6}{7} & 3 \end{pmatrix}$ . 14. а)  $\begin{pmatrix} 19 & 16 \\ 13 & 13 \end{pmatrix}$ ; б)  $\frac{19}{13} + i\frac{16}{13}$ . 18. а) Линейно зависима;  
 б) линейно независима; в) — е) линейно зависима. 19. а)  $a_3 = -8a_1 - 2a_2$ ; б)  $a_1 = 3a_2 + 5a_3 + 4a_4 + 7a_5$ ; в)  $f_4(x) = 2f_1(x) + \frac{1}{3}f_2(x) + 2f_3(x)$ .

21.  $f(x) = 2f_1(x) - 3f_2(x)$ . 22.  $2 - 7i = 2(2 - 3i) - \frac{1}{2}(4 + 2i)$ .
- § 2. 5. а)  $\{a_1, a_2\}$ ;  $\{a_1, a_3\}$ ,  $\{a_2, a_3\}$ ; б)  $\{b_1, b_2\}$ ,  $\{b_1, b_3\}$ ,  $\{b_2, b_3\}$ ; в)  $\{c_1\}$ ,  $\{c_2\}$ ,  $\{c_3\}$ ; г)  $\{f_1, f_2\}$ ,  $\{f_1, f_3\}$ . 7. Базис  $M_2$ :  $\{a_1, a_2, e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$ .
8. Базис пространства:  $\{3x + x + 2x^2, -2 + x - x^2, 1\}$ . 9. Базис  $R^4$ :  $\{(1, 2, 3, 4), (4, 1, 2, 3), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\}$ . 10.  $\lambda \neq \pm 3$ . 11. Базис пространства  $C$ :  $\{2 + 3i, 1\}$ . 12.  $b = \frac{10}{3}a_3 - \frac{4}{3}a_2 - \frac{4}{3}a_1$ . 13.  $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ ,  $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ ,  $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ ,  $\dim M_1 = 2$ . 14. Один из базисов:  $a_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $a_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $a_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $a_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{12} + 1 \cdot a_{21} + 1 \cdot a_{22}$ . 19. а)  $8 + 9i = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + (-3) \cdot (-3i)$ ; б)  $8 + 9i = 4 \cdot (2 - i) + \frac{13}{4}(4i)$ . 20. а)  $a = -2(3, 0, 0) + 0(0, 2, 0) + (-5)(0, 0, 1)$ ; б)  $a = \frac{35}{6}(1, -1, 0) + \frac{1}{6}(1, 2, 3) + \frac{11}{2}(0, 1, -1)$ .
21.  $a = (2, 0, 3, -1)$ . 22. а)  $f(x) = \left(-3, 5, \frac{1}{2}, 0\right)$ ; б)  $f(x) = (2, -3, 1, 0)$ .
23. а) Первая и вторая координаты поменяются местами; б) первая координата станет последней, вторая — предпоследней и т. д. 24.  $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  и  $T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $a = 3e_1 + 5e_2 - 4e_3 = 6e'_1 - e'_2 - 3e'_3$ . 25.  $a = -2b_1 - 3b_2 + 5b_3$ ,  $b = 7a_1 + a_2 + 2a_3$ . 26.  $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$  и  $T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ,  $f(x) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + (-4)x^2 = 4(1 - x + 2x^2) + 4\left(-1 + \frac{3}{2}x - 3x^2\right) + (-2) \cdot x$ . 27.  $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  и  $T^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 9 & -6 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & 12 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $a = 2e_1 + 3e_2 + 5e_3 - 4e_4 = \frac{1}{15}e'_1 + \frac{3}{5}e'_2 - \frac{16}{5}e'_3 + \frac{9}{5}e'_4$ . 28.  $e'_1 = (1, 1, -2)$ ,  $e'_2 = (3, 0, 3)$ ,  $e'_3 = (-1, 8, 5)$ ;  $a = -\frac{1}{15}e'_1 + \frac{11}{15}e'_2 + \frac{2}{15}e'_3$ . 29.  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow a + bi$ . 30.  $(2, 1, 3) \rightarrow 1 + x, -4x^2 \rightarrow (0, -4, 4)$ . 34. а) 3; б) 3.
- § 3. 6. а) Нет; б) да, если данная прямая проходит через начало координат, нет — в противном случае; в) нет; г) да; д) нет; е) да; ж) нет; з) да. 7. а) Базис:  $(1, 0, 0, 0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 0, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 0, 1, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 0, 0, 1, 0)$ , размерность равна 5; б) базис:  $(1, 0, 1, 0, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 0, 1, 0, 1)$ , размерность равна 2; в) базис:  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , размерность равна 2.

8. Да:  $a = 2a_1 - a_2$ . 9. а)  $a_2, a_3$ ; б)  $a_1, a_2$ ; в)  $a_1, a_2$ ; г)  $f_1, f_2$ ; размерность во всех случаях равна 2. 10.  $a_1, a_2$  — базис  $L_1$ ,  $b_1, b_2$  — базис  $L_2$ ,  $a_1, a_2, b_1$  — базис  $L_1 + L_2$ ,  $(2, 3, 1, 1)$  — базис  $L_1 \cap L_2$ ,  $\dim L_1 = \dim L_2 = 2$ ,  $\dim L_1 \cap L_2 = 1$ ,  $\dim (L_1 + L_2) = 3$ . 11. а) Например,  $(2, 1, 0, 0)$ ; б) например,  $(19, 7, 8, 0)$ ,  $(3, -25, 0, 8, 0)$ ,  $(-4, 4, 0, 0, 8)$ ; в) например,  $(-1, 1, 0, 0, 0)$ ,  $(-1, 0, 1, 0, 0)$ ,  $(-1, 0, 0, 0, 1)$ . 23. Один из базисов  $L : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $H_0 = H_1$ . 24. Многообразие решений  $a_0 + L$  во всех случаях двумерное. За векторы  $b_1, b_2$  базиса  $L$  и вектор сдвига  $a_0$  можно принять следующие векторы: а)  $b_1 = (0, 1, 1, 0)$ ,  $b_2 = (-1, 0, 0, 1)$ ,  $a_0 = (1, 0, 0, 0)$ ; б)  $b_1 = (-1, 1, 0)$ ,  $b_2 = (-1, 0, 1)$ ,  $a_0 = (1, 0, 0)$ ; в)  $b_1 = (1, 1, 0, 0)$ ,  $b_2 = (1, 0, 0, 1)$ ,  $a_0 = (0, 1, 1, 0)$ . 25. а) Пересекаются в точке  $a = (-2, -1, 0, 1)$ ; б), в) не пересекаются. 26. Точка пересечения  $a = (5, 1)$ . 27. Точка пересечения  $a = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ .

### Глава III

1. 4. Да. 5. Нет. 7.  $|a| = 4, |b| = 6, |x - y| = 6$ . 8. а)  $\frac{\pi}{2}$ ; б)  $\frac{\pi}{3}$ .
9. а)  $|AB| = |BC| = 1, |AC| = \sqrt{2}, \hat{B} = \frac{\pi}{2}, \hat{A} = \hat{C} = \frac{\pi}{4}$ ; б)  $|AB| = |AC| = |BC| = 2, \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \frac{\pi}{3}$ . 15.  $\left( \int_a^b f(x) g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b (f(x))^2 dx \cdot \int_a^b (g(x))^2 dx$ . 16.  $(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n)^2 \leq (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2) \cdot (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_n^2)$ .
- § 2. 4. Да. 5. а)  $(3, 2, 1)$ ,  $(-1, -10, 23)$ ,  $(-196, 245, 98)$ ; б)  $(1, 1, -1, -2)$ ,  $(27, 6, -13, 23)$ ,  $(-875, 4032, 1505, 826)$ . 6. Ортонормированный базис:  $\varphi_1(x) = 1, \varphi_2(x) = \sqrt{3}(2x - 1), \varphi_3(x) = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)$ ;  $f_1(x) = (-1) \cdot \varphi_1(x) + 2 \cdot \varphi_2(x) + 0 \cdot \varphi_3(x), f_2(x) = 2 \cdot \varphi_1(x) + 0 \cdot \varphi_2(x) + 1 \cdot \varphi_3(x), (f_1, f_2) = -2, |f_1| = |f_2| = \sqrt{5}$ . 11. Например,  $(2, 2, 1, 0)$ ,  $(5, -2, -6, -1)$ . 12. Например,  $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ . 13. Напр.  $(1, 0, 2, 6), (20, 41, -1, -3)$ . 14. а)  $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, 0, \frac{\sqrt{6}}{6}\right), \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, 0, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ; б)  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ . 15. а)  $\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{570}}(16, -8, -15, 5)$ ; б)  $\frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{1870}}(2, -4, -25, 35)$ .
16.  $\lambda = 1$ . 17.  $2, \frac{1}{2} - x, 1 - 6x + 6x^2$ . 18.  $\varphi_1(x) = 2 \cdot f_1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot f_2 + 0 \cdot f_3; \varphi_2(x) = \frac{1}{2} \cdot f_1 + \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot f_2 + \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot f_3; (\varphi_1, \varphi_2) = \frac{7}{6}$ . 19.  $v_1 = -3 + 4i, v_2 = 68 + 51i$ .
- § 3. 6. Один из базисов  $L - a = (1, 1, 1)$ , один из ортогональных базисов  $L \perp - b_1 = (-1, 1, 0), b_2 = (-1, 1, 2); a, b_1, b_2$  — ортогональный базис  $R^3$ . 7. а) Например,  $(-2, 1, 3, 0, 0), (-3, -3, 0, 3, 0), (5, -1, 0, 0, 3)$ ; б) например,  $(1, 22, 2, 0, 0), (-1, -1, 0, 1, 0)$ . 8. а)  $a = (1, 11, -5), b = (-13, -2, -7)$ ; б)  $a = (3, -6, -3, -3), b = (0, 1, 5, -7)$ .

9.  $a = (5, -5, -2, -1)$ ,  $b = (2, 1, 1, 3)$ . 10. а)  $\sqrt{7}$ ; б) 2. 12. а)  $\frac{\pi}{3}$ ; б)  $\frac{\pi}{6}$ .  
13.  $a = 4 + 2i$ ,  $b = -1 + 2i$ . 14.  $3\sqrt{5}$ . 15.  $\frac{\pi}{6}$ .

## Глава IV

- § 1 6. а) Нет; б) да. 8. б) Матрицы  $\varphi$  в базисах  $e_1, e_2, e_3$  и  $e'_1, e'_2, e'_3$ :  
 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;  $\varphi(x) = e_1 + 2e_2$ . 9.  $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . 10.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .  
11.  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ . 12.  $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}$ . 14.  $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -15 & -2 \\ 3 & 2 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ . 15.  $A_{\varphi_1} =$   
 $= \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix}$ ,  $A_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$ . 16. а)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} \frac{20}{3} & -\frac{5}{3} & 5 \\ -\frac{16}{3} & \frac{4}{3} & -4 \\ -\frac{8}{3} & \frac{3}{3} & -2 & 6 \end{pmatrix}$ .  
17.  $\begin{pmatrix} -8 & 16 & -13 \\ -11 & 21 & -17 \\ -7 & 13 & -11 \end{pmatrix}$ . 18. а)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;  
в)  $\begin{pmatrix} -26 & -30 & 224 & -372 \\ -5 & 7 & -40 & 70 \\ -1 & 0 & 11 & -18 \\ -1 & 2 & -7 & 11 \end{pmatrix}$ . 19.  $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 \\ -16 & 0 & -8 \\ -11 & 1 & -7 \end{pmatrix}$ . 20.  $\begin{pmatrix} 44 & 44 \\ -59 & -25 \end{pmatrix}$ .  
21.  $\begin{pmatrix} 109 & 93 \\ 34 & 29 \end{pmatrix}$ . 22.  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

- § 2. 5.  $\ker \varphi = \{0\}$ ,  $\varphi(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$ ,  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . 6. а) За базис ядра можно  
принять, например, вектор  $e_3$ , а за базис области значений — векторы  $e_1, e_2$ ,  
 $d = \dim \ker \varphi = 1$ ,  $r = \dim \varphi(\mathbb{R}^3) = 2$ ; б)  $\ker \varphi = L(e_2, e_3)$ ,  $\varphi(\mathbb{R}^3) = L(e_1)$ ,  
 $d = 2$ ,  $r = 1$ . 7.  $r(\varphi) = r(A) = 3$ ,  $d = n - r = 0$ ,  $\ker \varphi = \{0\}$ ,  $\varphi$  —  
взаимно однозначно. 8. а) Да,  $A_{\varphi^{-1}} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ; б)  $\varphi^{-1}(y) = \frac{3}{8}a_1 +$   
 $+\frac{5}{4}a_2 + \frac{7}{8}a_3$ . 11. а)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\ker \varphi = \{0\}$ ,  $\varphi(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$ ; б)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  
 $\varphi(\mathbb{R}^3) = \{x \mid x = \alpha(0, 1, 0) + \beta(-1, 0, 0), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ ,  
 $\ker \varphi = \{x \mid x = k(1, -1, 1), k \in \mathbb{R}\}$ . 12. За базис ядра можно при-  
нять, например, векторы  $-e_1 + e_2$ ,  $-e_1 + e_3$ , а за базис области значе-  
ний — вектор

$$e_1 + e_2 + e_3, d = 2, r = 1. 13. а) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}; б) за базис ядра можно при-$$

нять, например, векторы  $a_2, a_3$ , а за базис области значений — вектор  $b$ .

14.  $\varphi(F_n) = F_{n-1}$ ,  $\ker \varphi$  есть множество многочленов нулевой степени.  
15.  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , один из базисов ядра —  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ , один из ба-

зисов области значений —  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . 18.  $M = a_0 + \ker \varphi$ , в качестве  $a_0$  можно взять вектор  $(0, -5, 0, 1)$ , а в качестве базиса  $\ker \varphi$  — векторы  $(0, 5, 1-2), (1, 2, 0-1)$ .

§ 3. 6. а) При той же интерпретации векторов  $\mathbb{R}^3$ , что и в задаче 1,  $\varphi$  есть проектирование векторов на ось  $Ox$ , его одномерные инвариантные подпространства — это ось  $Ox$  и все центральные прямые плоскости  $yOz$ , двумерные инвариантные подпространства — плоскость  $yOz$  и все плоскости, проходящие через ось  $Ox$ ; б)  $\varphi$  есть растяжение (сжатие) в  $|\alpha|$  раз вдоль оси  $Ox$  с последующим отражением относительно плоскости  $zOy$  при  $\alpha < 0$ , инвариантные подпространства те же, что и в задаче 1. 8. Вектор  $b_5$  — не собственный, остальные — собственные;  $b_1, b_2$  отвечают собственному значению  $\lambda = 1$ ,  $b_3, b_4$  — собственному значению  $\lambda = 0$ . 9. а)  $\lambda = -1$ , отвечающие  $\lambda = -1$  собственные векторы образуют (вместе с вектором 0) подпространство  $K(-1)$ , вектор  $(1, 1, -1)$  — один из базисов  $K(-1)$ ; б)  $\lambda = 2$ ;  $(1, 2, 0), (0, 0, 1)$  — один из базисов  $K(2)$ ; в)  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$ ;  $(1, 1, 1)$  — один из базисов  $K(1)$ ;  $(1, 2, 3)$  — один из базисов  $K(0)$ ; г)  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$ ;  $(1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$  — один из базисов  $K(1)$ ;  $(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)$  — один из базисов  $K(0)$ ; д)  $\lambda = 2$ ;  $(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)$  — один из базисов  $K(1)$ . 12. Кроме самого пространства и нулевого подпространства, двумерное подпространство  $K(2) = \{x | x = \alpha(1, 1, 0) + \beta(-1, 0, 1), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ , все его одномерные подпространства, одномерное подпространство  $K(1) = \{x | x = \alpha(2, 2, -1), \alpha \in \mathbb{R}\}$  и все содержащие его двумерные подпространства. 13.  $\lambda = 0$ ,  $K(0) = F_0$  — множество многочленов нулевой степени;  $F_k (k = 0, 1, \dots, n-1)$  — все собственные инвариантные подпространства. 14. Систему  $a_1, a_2$  можно, например, дополнить до базиса вектором

$b = (1, 0, 0)$ , в базисе  $a_1, a_2, b$  отображение  $\varphi$  имеет матрицу  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

15. а) Не приводится; б) приводится к виду  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  в базисе  $(1, 1, 0, 0),$

$(1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (1, -1, -1, -1)$ ; в) не приводится; г) приво-

дится к виду  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  в базисе  $(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, -1, 1, 0),$

$(-1, 0, 0, 1)$ . 16.  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ .



# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
<b>Глава I. Группы, кольца, поля . . . . .</b>	<b>4</b>
§ 1. Бинарные операции и алгебраические системы . . . . .	4
§ 2. Некоторые классы операций. Нейтральные и обратные элементы.	
Обратимые операции . . . . .	7
§ 3. Группы . . . . .	11
§ 4. Подгруппы . . . . .	18
§ 5. Конечные группы . . . . .	24
§ 6. Смежные классы группы по подгруппе. Теорема Лагранжа	29
§ 7. Нормальные делители и фактор-группы . . . . .	31
§ 8. Гомоморфные образы группы . . . . .	36
§ 9. Кольца и поля . . . . .	39
§ 10. Комплексные числа . . . . .	46
<b>Глава II. Векторные пространства . . . . .</b>	<b>50</b>
§ 1. Определение векторного (линейного) пространства, линейная зависимость векторов . . . . .	50
§ 2. Конечномерные линейные пространства . . . . .	56
§ 3. Линейные подпространства и многообразия . . . . .	65
<b>Глава III. Евклидовы пространства . . . . .</b>	<b>73</b>
§ 1. Скалярное умножение в линейном пространстве. Евклидово пространство . . . . .	73
§ 2. Ортогональная система векторов. Ортонормированный базис.	
Процесс ортогонализации . . . . .	77
§ 3. Ортогональное дополнение к подпространству. Элементы анали- тической геометрии в евклидовом пространстве . . . . .	81
<b>Глава IV. Линейные отображения . . . . .</b>	<b>86</b>
§ 1. Линейные отображения и их матрицы. Сумма и произведение линейных отображений . . . . .	86
§ 2. Ядро и область значений линейного отображения . . . . .	92
§ 3. Инвариантное подпространство. Собственные векторы и собст- венные значения линейного отображения . . . . .	98
Ответы . . . . .	107